

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет радіоелектроніки

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**ОНИЩЕНКО АНДРІЙ АНАТОЛІЙОВИЧ**

УДК 621.372:550.388

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**«ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ В МЕТОДАХ**  
**ДИСТАНЦІЙНОГО РАДІОЗОНДУВАННЯ ГЕОКОСМОСУ»**

Спеціальність 01.04.03 – «Радіофізика»  
(фізико-математичні науки)

Подається на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ А. А. Онищенко

Науковий керівник Лазоренко Олег Валерійович, доктор фізико-математичних наук, доцент

Харків – 2023

## АНОТАЦІЯ

*Онищенко А. А.* Фрактальний аналіз в методах дистанційного радіозондування геокосмосу. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.03 – радіофізика (фізико-математичні науки). – Харківський національний університет радіоелектроніки Міністерства освіти і науки України, Харків, 2023.

Дисертаційну роботу присвячено розв'язанню актуальної задачі радіофізики, що полягає у підвищенні інформативності методів дистанційного радіозондування для радіофізичних досліджень геокосмосу із використанням методів фрактального та мультифрактального аналізів.

Об'єкт дослідження – фрактальні та мультифрактальні процеси в задачах фізики та радіофізики геокосмосу.

Предмет дослідження – параметри та характеристики фрактальних і мультифрактальних сигналів і процесів в системі Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера як реакції на дію потужних нестационарних джерел енерговиділення.

Методи дослідження, використані у роботі, поєднують: 1) апарат фрактального аналізу, що містить великий набір різноманітних методів, використовувався як для теоретичного дослідження модельних фрактальних сигналів, так і для дослідження експериментальних даних, методи мультифрактального аналізу, що застосовувалися як для теоретичного вивчення модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, так і для вивчення сигналів, отриманих у методах дистанційного радіозондування геокосмосу, 3) метод комп'ютерного моделювання, що забезпечував реалізацію методів фрактального та мультифрактального аналізів під час дослідження модельних сигналів і процесів, 4) вейвлет-аналіз, оснований на застосуванні безперервного вейвлет-перетворення, який використовувався для виявлення часо-частотних структур як складової в новому комплексному методі фрактального

аналізу сигналів і процесів, 5) фур'є-аналіз, що застосовувався для оцінки дисперсійних спотворень модельних фрактальних надширококутових (ФНШС) сигналів, що виникають у процесі їх поширення у геокосмосі.

Запропоновано нові комплексні методи фрактального аналізу сигналів і процесів, а саме, узагальнений фрактальний аналіз (УФА), динамічний фрактальний аналіз (ДинФА) і метод коригуючої функції (КФ).

За інформативністю метод УФА значно перевершує інші існуючі методи монофрактального аналізу, оскільки пропонує вивчення шістнадцяти характеристик замість традиційних двох-трьох аналогічних.

Метод ДинФА вперше поєднує можливості фрактального та часо-частотного методів аналізу, а оцінки, отримані в одному з них, використовуються для покращення результатів іншого.

Будучи універсальним методом, метод КФ дозволяє підвищити точність оцінки фрактальних і мультифрактальних характеристик досліджуваних сигналів і процесів у методах фрактального і мультифрактального аналізу.

На основі створених нових моделей монофрактальних і мультифрактальних сигналів, та також ФНШС сигналів, продемонстровано особливості, переваги та недоліки запропонованих нових методів.

Із використанням методів модуля максимумів вейвлет-перетворення та мультифрактального детрендованого флуктуаційного аналізу, а також запропонованих нових числових характеристик на основі функції мультифрактального спектра (коефіцієнта асиметрії та показника його відносної ширини, а також розмірності носія мультифракталу) проведено мультифрактальний аналіз низки оригінальних моделей фрактальних і мультифрактальних сигналів. Розроблено нові зручні формати представлення результатів аналізу. Визначено особливості мультифрактального аналізу монофрактальних, мультифрактальних і нефрактальних сигналів і процесів, сформульовано відповідні рекомендації для практиків.

Розроблено оригінальні алгоритми монофрактального та мультифрактального аналізів. З їх застосуванням проведено дослідження фрактальних характерис-

тик експериментальних даних, отриманих методами дистанційного радіозондування геокосмосу (сигналів гравітаційних хвиль, інфразвукових сигналів, викликаних падінням Челябінського метеороїда, часових варіацій електромагнітного поля Землі, що супроводжували надпотужну геокосмічну бурю та потужний землетрус).

Будучи створеними унікальним потужним природним надширококутовим процесом зі змінною середньою частотою (ЗСЧ НШС), сигнали гравітаційних хвиль виявилися фрактальними НШС (ФНШС) сигналами зі складною нестационарною мультифрактальною структурою. Однак на даний момент не можна однозначно стверджувати, чи є отримана фрактальна складова частиною сигналу гравітаційної хвилі, чи вона є шумом зовсім іншого фізичного походження.

Встановлено, що як прямий, так і обернений сигнали інфразвукових хвиль, які виникли під час падіння Челябінського метеороїда, містять пару фрактальних ЗСЧ НШС процесів зі складною нестационарною мультифрактальною структурою. Будучи мультифрактальними, всі чотири ЗСЧ НШС процеси виявилися майже скрізь антиперсистентними. Скоріш за все, перші процеси в кожній парі пов'язані з виникненням і поширенням вибухової ударної хвилі, а другі процеси пояснюються виникненням і поширенням балістичної хвилі.

Виявлено, що часові варіації електромагнітного поля Землі, які спостерігалися під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., містять декілька ультракоротких і ЗСЧ НШС процесів з типовою мультифрактальною структурою, тому їх можна класифікувати як ФНШС процеси. Усі досліджені збурення виявилися мультифрактальними та майже скрізь антиперсистентними.

Продемонстровано, що часові варіації електромагнітного поля Землі, які були зафіксовані під час потужного землетрусу в Туреччині 20 січня 2020 р., є ФНШС процесами. Виявлено особливості часової динаміки фрактальних і мультифрактальних характеристик, які можуть бути пов'язані з провісниками землетрусів.

Досліджено дисперсійні спотворення високочастотних ФНШС сигналів, які виникають при їх поширенні в навколоземному космічному просторі.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному.

Вперше створено комплексний метод фрактального аналізу сигналів і процесів – узагальнений фрактальний аналіз, що має унікальну інформативність. На реальних прикладах продемонстровано доцільність і корисність реалізації основної ідеї методу, що полягає у отриманні достатньої кількості інформації про фрактальну структуру та характер її змін у часі шляхом вивчення великого набору з шістнадцяти числових характеристик (прямих, спектральних, а також характеристик фазового простору) та їх порівняння між собою, тоді як у традиційних методах фрактального аналізу зазвичай використовуються максимум дві – три числові характеристики.

Вперше розроблено метод фрактального аналізу – динамічний фрактальний аналіз, який встановлює зв'язок між фрактальним і часо-частотним аналізами. Із використанням досліджень модельних і реальних сигналів і процесів доведено ефективність побудови часових залежностей фрактальних розмірностей із застосуванням параметрів часо-частотних структур, що існують у досліджуваному сигналі, шляхом обрання оптимальної ширини ковзаючого спектрального «вікна» у часовій області.

Вперше запропоновано метод підвищення точності числових характеристик, отримуваних у методах фрактального та мультифрактального аналізів – метод коригуючої функції. Із використанням набору спеціально створених модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів продемонстровано, що новий метод дозволяє для методів монофрактального аналізу зменшити похибку оцінювання низки фрактальних розмірностей з 24 – 50 % до 5 – 7 %, а для методів мультифрактального аналізу зменшити похибку оцінювання узагальненого показника Херста з 5 – 90 % до 3 – 8 %. Також для клітинної, регуляризаційної, варіаційної та херстової фрактальних розмірностей завдяки методові коригуючої функції вперше отримано значення мінімальної кількості точок дискретного вектора, за яких ці розмірності можна обчислювати.

У рамках мультифрактального аналізу запропоновано набір нових числових характеристик, що є корисними й ефективними для аналізу нестационарних (у сенсі

фрактальних властивостей) сигналів і процесів. Корисність застосування даних характеристик доведено з використанням аналізу як модельних, так і реальних сигналів і процесів.

Вперше з використанням створених нових методів фрактального та мультифрактального аналізів отримано унікальну інформацію про особливості фрактальної структури низки процесів у геокосмосі, які є його реакцією на дію потужних, нестационарних джерел енерговиділення (гравітаційна хвиля, падіння Челябінського метеороїда, надпотужна геокосмічна буря, потужний землетрус). Встановлено, що досліджені процеси належать до класу фрактальних надширококутових.

Вперше виявлено характер дисперсійних спотворень високочастотних ФНШС сигналів, що виникають у процесі їх поширення у геокосмосі.

Практичне значення одержаних результатів зумовлено такими чинниками.

Отримана нова корисна інформація про особливості фрактальної структури низки процесів у геокосмосі, які є його реакцією на дію потужних, нестационарних джерел енерговиділення (гравітаційна хвиля, падіння Челябінського метеороїда, надпотужна геокосмічна буря, потужний землетрус) може бути застосована для успішного розв'язання проблеми створення глобальної міжнародної системи оперативного моніторингу стану геокосмосу, що стоїть перед людством.

Запропонований метод узагальненого фрактального аналізу є потужним інструментом детального дослідження фрактальних властивостей сигналів і процесів у найрізноманітніших галузях науки та техніки.

Метод динамічного фрактального аналізу вперше поєднує методи фрактального та часо-частотного аналізів. Оскільки у переважній більшості випадків вивчення нестационарної фрактальної структури сигналу або процесу дослідника цікавлять властивості певних збурень, то саме метод динамічного фрактального аналізу дозволяє, з одного боку, виявляти такі збурення й отримувати оцінки їх параметрів, а з іншого боку, саме на основі цих оцінок проводити оптимальне дослідження фрактальних характеристик.

Набір нових моделей фрактальних і мультифрактальних, та фрактальних надширокосмугових сигналів, а також запропоновані нові мультифрактальні характеристики корисні для розв'язання різноманітних задач в області фрактальної радіофізики, фрактальної радіолокації, фрактальної радіотехніки, фрактальних телекомунікації та зв'язку, а також при застосуванні засобів фрактального та мультифрактального аналізів для моделювання та дослідження процесів у біофізиці, біології, медицині, геофізиці, екології, астрономії, тощо.

Метод коригуючої функції є першою спробою створення універсального засобу для розв'язання задачі підвищення точності оцінок характеристик досліджуваних сигналів і процесів в методах фрактального та мультифрактального аналізів. Більш того, у рамках цього методу вперше запропоновано чіткий підхід до оцінювання мінімальної кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного сигналу у випадку використання завданого методу аналізу.

Запропоновані алгоритми проведення фрактального та мультифрактального аналізів сигналів і процесів можна рекомендувати для практичного застосування спеціалістам у різноманітних галузях науки та техніки, що бажають використовувати сучасні фрактальні ідеї у власній професійній діяльності.

Оцінки характеру дисперсійних спотворень фрактальних надширокосмугових сигналів корисні для досліджень доцільності й ефективності застосування таких сигналів для розв'язання задач радіолокації, радіонавігації, дистанційного радіозондування, телекомунікації та зв'язку тощо.

**Ключові слова:** фрактальний аналіз, мультифрактальний аналіз, фрактальний сигнал, мультифрактальний процес, дистанційне радіозондування, дисперсійні спотворення, радіофізика геокосмосу.

## ABSTRACT

*Onishchenko A. A.* Fractal analysis in methods of remote radio sounding of geospace. – Manuscript.

Thesis for candidate's degree in Physics and Mathematics by specialty 01.04.03 – Radio Physics. – Kharkiv National University of Radioelectronics of the Ministry of Education and Science of Ukraine. – Kharkiv, 2023.

The dissertation is devoted to solving the current problem of radiophysics, which is to increase the informativeness of remote radio sounding methods for radiophysical investigations of the geospace by using fractal and multifractal analysis methods.

The object of research is the fractal and multifractal processes in the problems of physics and radiophysics of geospace.

The subject of research is the parameters and characteristics of fractal and multifractal signals and processes in the Earth – atmosphere – ionosphere – magnetosphere system as a reaction to the action of powerful non-stationary sources of energy release.

The research methods used in the work combine the following: 1) the fractal analysis, which contains a large set of various methods and was used both for the theoretical study of model fractal signals and for the study of experimental data, 2) the methods of multifractal analysis, which were used both for the theoretical study of model fractal and multifractal signals and for the study of signals obtained in the methods of remote radio sensing of the geospace, 3) the computer modeling method, which ensured the implementation of fractal and multifractal analysis methods during the investigation of model signals and processes, 4) the wavelet analysis based on the application of continuous wavelet transformation, which was used to detect time-frequency structures and is a component in a new complex method of fractal analysis of signals and processes, 5) the Fourier analysis, which was used to estimate dispersion distortions of the model fractal ultra-wideband (FUWB) signals arising in the process of their propagation in geospace.



New complex methods of fractal analysis of signals and processes, namely the generalized fractal analysis (GFA), the dynamic fractal analysis (DynFA) and the corrective function (CF) method are proposed.

The GFA method significantly exceeds other existing methods of monofractal analysis in terms of informativeness, as it offers the study of sixteen characteristics instead of the traditional two or three similar ones.

The DynFA method for the first time combines the capabilities of the fractal and time-frequency analysis methods, and the estimates obtained in one of them are used to improve the results of the other.

Being a universal method, the CF method allows to increase the accuracy of the assessment of fractal and multifractal characteristics of the investigated signals and processes in the methods of fractal and multifractal analyzes.

Using the created new model monofractal and multifractal signals, and FUWB signals, the features, advantages and disadvantages of the new methods are demonstrated.

Using the wavelet transform module maxima method and the multifractal detrended fluctuation analysis method, as well as new numerical characteristics based on the function of the multifractal spectrum (the asymmetry coefficient and the index of its relative width, as well as the dimension of the multifractal support), a multifractal analysis of a set of original fractal and multifractal signal models was performed. New convenient formats for presenting analysis results have been developed. Features of multifractal analysis of monofractal, multifractal and non-fractal signals and processes are identified, appropriate recommendations for practitioners are formulated.

Original algorithms for mono- and multifractal analysis have been developed. With their application, a study of the fractal characteristics of experimental data obtained in the methods of remote radio sounding of the geospace (signals of gravitational waves, infrasound signals caused by the fall of the Chelyabinsk meteoroid, temporal variations of the Earth's electromagnetic field, which accompanied a super-powerful geospace storm and a powerful earthquake) was performed.

Being generated by a unique powerful natural ultra-wideband process with changing mean frequency (ChMF UWB), the gravitational wave signals were appeared to be

fractal UWB (FUWB) ones with complex non-stationary multifractal structure. However, currently, it is not possible to unequivocally state whether the received fractal component is part of the gravitational wave signal or whether it is noise of a completely different physical origin.

Both the direct and the reversed signals of the infrasound waves that occurred during the fall of the Chelyabinsk meteoroid were found to contain a pair of the fractal ChMF UWB processes with complex non-stationary multifractal structure. Being multifractal, all four ChMF UWB processes were appeared to be almost anywhere antipersistent. Most likely, the first processes in each pair are related to the generation and propagation of an explosive shock wave, and the second processes are explained by the generation and propagation of a ballistic wave.

The temporal variations of the Earth's electromagnetic field that were observed during the super-powerful geospace storm on September 7-8, 2017 were found to contain several ultra-short and ChMF UWB processes with typical multifractal structure and therefore they can be classified as the FUWB processes. All disturbances detected were appeared to be multifractal and almost anywhere antipersistent.

The temporal variations of the Earth's electromagnetic field that were detected during the powerful earthquake in Turkey on January 20, 2020 were shown to be the FUWB processes. Peculiarities of the temporal dynamics of fractal and multifractal characteristics, which may be associated with the harbingers of earthquakes, have been revealed.

Dispersion distortions of high-frequency fractal ultra-wideband signals that occur during their propagation in the near-to-Earth space have been investigated.

The scientific novelty of the obtained results is as follows.

For the first time, a complex method of fractal analysis of signals and processes, which was called as the generalized fractal analysis and has a unique informativeness, was created.

At real examples, the feasibility and usefulness of implementing the main idea of the method, which consists in obtaining a sufficient amount of information about the fractal structure and the nature of its changes with time by studying a large set of sixteen numerical characteristics (direct, spectral, and phase space characteristics) and comparing

them with each other, while in traditional methods of fractal analysis, a maximum of two or three characteristics are usually used, were demonstrated.

For the first time, a method of fractal analysis, which was called as the dynamic fractal analysis and establishes a connection between fractal and time-frequency analyses, was developed. Using the investigations of model and real signals and processes, the effectiveness of constructing of the time dependences of fractal dimensions with usage of the parameters of time-frequency structures existing in the studied signal, by choosing the optimal width of the sliding spectral "window" in the time domain, has been proven.

For the first time, a method of increasing the accuracy of numerical characteristics obtained in the methods of fractal and multifractal analyzes, which was called as the corrective function method, was proposed. With the use of a set of specially created model fractal and multi-fractal signals, it was demonstrated that the new method allows for monofractal analysis methods to reduce the error of estimating a number of fractal dimensions from 24 – 50% to 5 – 7%, and for multifractal analysis methods to reduce the error of estimating the generalized Hurst index from 5 – 90% to 3 – 8%. Also, for the boxing, regularizational, variational, and Hurst fractal dimensions, thanks to the CF method, the value of the minimum number of points of the discrete vector, by which these dimensions can be calculated, was obtained for the first time.

In bounds of multifractal analysis, a set of new numerical characteristics, which are useful and effective for the analysis of non-stationary (in the sense of fractal properties) signals and processes, is proposed. Using the analysis of both model and real signals and processes, the usefulness of the application of these characteristics has been proven.

For the first time, using the created new methods of fractal and multi-fractal analysis, the unique information about the features of the fractal structure of a number of processes in the geospace, which are its reaction to the action of powerful, non-stationary sources of energy release (gravitational wave, the fall of the Chelyabinsk meteoroid, a super-powerful geospace storm, a powerful earthquake) was obtained. It was established that The investigated processes were found to be the members of the class of FUWB processes.

For the first time, the character of dispersion distortions of high-frequency fractal ultra-wideband signals appearing in the process of their propagation in the geospace was revealed.

The practical significance of the obtained results is determined by the following factors.

The obtained new useful information about the features of the fractal structure of a number of processes in the geospace, which are its reaction to the action of powerful, non-stationary sources of energy release (gravitational wave, the fall of the Chelyabinsk meteoroid, a super-powerful geospace storm, a powerful earthquake) can be applied to successfully solve the problem of creating a global international system for operational monitoring of the state of the geospace facing humanity.

The proposed method of generalized fractal analysis is a powerful tool for detailed research of fractal properties of signals and processes in various fields of science and technology.

The method of dynamic fractal analysis combines the methods of fractal and time-frequency analyzes for the first time. Since in the vast majority of cases of studying the non-stationary fractal structure of a signal or process, the researcher is interested in the properties of certain disturbances, the method of dynamic fractal analysis allows, on the one hand, to detect such disturbances and obtain the estimations of their parameters, and on the other hand, it is precisely on the basis of these estimates to conduct an optimal study of fractal characteristics.

A set of new models of fractal and multifractal and fractal ultra-wideband signals, as well as the proposed new multifractal characteristics are useful for solving various problems in the field of fractal radiophysics, fractal radar, fractal radio engineering, fractal telecommunications, as well as when applying fractal and multifractal analysis tools for modeling and researching processes in biophysics, biology, medicine, geophysics, ecology, astronomy, etc.

The method of the corrective function is the first attempt to create a universal tool for solving the problem of increasing the accuracy of estimations of the characteristics of the studied signals and processes in the methods of fractal and multifractal analysis.

Moreover, as part of this method, for the first time, a clear approach to the estimation of the minimum number of samples of the discrete data vector of the investigated signal was proposed in the case of using the given analysis method.

The proposed algorithms for performing fractal and multifractal analysis of signals and processes can be recommended for practical application to specialists in various fields of science and technology, who wish to use modern fractal ideas in their own professional activities.

The estimations of the character of dispersion distortions of fractal ultra-wideband signals are useful for studies of the feasibility and effectiveness of using such signals for solving the problems of radar location, radio navigation, remote radio sensing, telecommunications, etc.

**Key words:** fractal analysis, multi-fractal analysis, fractal signal, multi-fractal process, remote radio sounding, dispersive distortions, radiophysics of the geospace.

**Список публікацій здобувача:**

**Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:**

1. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of the Fractal Ultra-Wideband Signals // Problems of Atomic Science and Technology. Series ‘Plasma Electronics and New Methods of Acceleration’. 2015. No. 4(98), Iss. 9. P. 248 – 251. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів).*

2. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Gravitational Waves // Vestnik of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series Physics. 2017. No. 26. P. 33 – 39.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

3. Chernogor L. F., Garmach K. P., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Earth’s Electromagnetic Field Variations Caused by the Powerful Geospace Storm Occurred on September 7 – 8, 2017 // Problems of Atomic Science and Technology. Series ‘Plasma Electronics and New Methods of Acceleration’. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 118 – 121. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).*

4. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A. Appl. Sci. and Eng. 2019. Vol. 20. P. 188 – 192. (Іноземний фаховий науковий журнал).

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

5. Лазоренко О. В., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Метод коригуючої функції для фрактального аналізу // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 210. С. 177 – 187.

*(Особистий внесок здобувача: участь у розробці метода коригуючої функції для фрактального та мультифрактального аналізів, створення набору модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, комп'ютерна реалізація методу коригуючої функції, результати аналізу модельних сигналів).*

6. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // Journal of Natural Science and Technologies. 2022. Vol. 1, No. 1. P. 56 – 61. (Іноземний фаховий науковий журнал).

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., а також участь в аналізі фізичного сенсу цих результатів).*

7. Лазоренко О. В., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Мультифрактальний аналіз модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 211. С. 74 – 85.

*(Особистий внесок здобувача: участь у розробці та комп'ютерна реалізація нових числових характеристик для мультифрактального аналізу).*

#### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

8. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of Model Fractal Ultra-Wideband Signals // 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals: Proceedings of 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15 – 19 September 2014, Kharkiv, 2014, P. 112 – 115.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів).*

9. **Онищенко А. А.**, Лазоренко О. В. Надширокопосмугові сигнали і фрактальний аналіз // Наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів

і здобувачів: Матеріали підсумкової наукової конференції професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів, (Харків, 23 – 24 березня 2016 р.). Харків: ХНАУ імені В. В. Докучаєва, 2016. С. 112 – 113.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів).*

10. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** New Models of the Fractal Ultra-Wideband Signals // UWBUSIS'2016: Proceedings of 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 5 – 11 September 2016, Odessa, 2016, P. 89 – 92. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: нові моделі фрактальних надширокопосмугових сигналів і результати їх фрактального аналізу).*

11. Лазоренко О. В., Чорногор Л. Ф., **Онищенко А. А.** Дослідження гравітаційної хвилі за допомоги фрактального та мультифрактального аналізів // Практичне застосування нелінійних динамічних систем в інфокомунікаціях: Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції (I Міжнародного симпозіуму) 9-11 листопада 2017 р., Чернівці, Україна, 2017. С. 136 – 137.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

12. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process // UWBUSIS'2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4–7 September 2018, Odessa, 2018, P. 34 – 39. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація).*

13. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid //



UWBUSIS'2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4 – 7 September 2018, Odessa, 2018, P. 123 – 126. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

14. Лазоренко О. В., Гармаш К. П., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Вариации геомагнитного поля Земли, сопровождавшие геокосмические бури 7 – 14 сентября 2017 г. // 18 Української конференції з космічних досліджень: тези 18 Української конференції з космічних досліджень 17 – 20 вересня 2018 р., Київ, 2018. С. 34

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнитного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).*

15. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // ICONAT-2019: Program and Abstract Book of International Conference on Natural Science and Technology, 18 – 20 September 2019, Kharkiv, 2019. P. 42.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

16. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Time-Frequency and Fractal Analyses of the Earth's Magnetic Field Variations Appeared During Powerful Geospace Storms Took Place in September 2017 // Astronomy and Space in the Kyiv University: Book of Abstracts International Conference, (Kyiv, 25-28 May 2021). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. Astronomical Observatory, 2021. P. 90 – 91.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнитного поля, що виникли під час надпотужної*

геокоsmічної бурі 7–8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).

17. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // ICONAT-2022: Conference Book of IV. Int. Conf. on Natural Science and Technology , 24 – 26 August 2022, Antalya, 2022. 74 p.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., а також участь в аналізі фізичного сенсу цих результатів).*

18. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis in Space Physics // Astronomy and Space Physics: Proceedings of International Conference 18 – 20 October 2022, Kyiv, 2022. P. 77 – 78.

*(Особистий внесок здобувача: участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

19. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis in Problems of the Applied Physics // Electronics and Applied Physics: Book of Proceedings of the XVIII International Conference, 18 – 22 October 2022, Kyiv, 2022. P. 148 – 149.

*(Особистий внесок здобувача: участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

**Наукові праці, які додатково відображують наукові результати дисертації:**

20. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Dispersive Distortions of the Fractal Ultra-Wideband Signals in Plasma Media // Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 135 – 138. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати моделювання дисперсійних спотворень високочастотних фрактальних надширокопосмугових сигналів, що виникають під час їх поширення у геокоsmосі).*

## ЗМІСТ

СПИСОК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	23
ВСТУП.....	25
РОЗДІЛ 1. ФРАКТАЛИ, ФРАКТАЛЬНИЙ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ.....	33
1.1. Основні поняття та визначення.....	33
1.1.1. Виникнення фрактального підходу.....	33
1.1.2. Визначення фрактала.....	35
1.1.3. Евклідова, топологічна та хаусдорфова розмірності.....	36
1.2. Фрактали у математиці, фізиці та радіофізиці.....	38
1.2.1. Математичні та фізичні фрактали.....	38
1.2.2. Монофрактали та мультифрактали.....	40
1.2.3. Фрактальна радіофізика.....	42
1.3. Числові характеристики монофракталів.....	43
1.3.1. Фрактальна розмірність математичного фрактала.....	43
1.3.2. Фрактальна розмірність фізичного фрактала.....	44
1.4. Числові характеристики мультифракталів.....	51
1.4.1. Узагальнена статистична сума.....	51
1.4.2. Спектр узагальнених розмірностей. Скейлінгова експонента.....	52
1.4.3. Функція мультифрактального спектра.....	54
1.5. Моделі фрактальних сигналів.....	56
1.6. Методи фрактального аналізу.....	58
1.7. Методи мультифрактального аналізу.....	60
1.8. Нерозв'язані задачі.....	61
1.9. Висновки до першого розділу.....	63
1.10. Постановка задач дослідження.....	64
РОЗДІЛ 2. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ СИГНАЛІВ.....	65
2.1. Метод узагальненого фрактального аналізу.....	65

2.1.1. Основна ідея методу.....	65
2.1.2. Прямі характеристики.....	66
2.1.3. Спектральні характеристики.....	73
2.1.4. Характеристики фазового простору.....	75
2.1.5. Особливості застосування.....	76
2.2. Метод динамічного фрактального аналізу.....	76
2.2.1. Основна ідея методу.....	76
2.2.2. Обчислювані характеристики.....	77
2.2.3. Формат представлення даних.....	78
2.3. Фрактальний аналіз фрактальних надширокосмугових сигналів.....	80
2.3.1. Фрактальні надширокосмугові сигнали та процеси.....	80
2.3.2. Нові моделі ФНШС сигналів.....	81
2.3.3. Порівняння ефективностей оцінювання фрактальних розмірностей модельних ФНШС сигналів.....	88
2.3.4. Частотна та часо-частотна структури ФНШС сигналів.....	94
2.4. Метод коригуючої функції.....	95
2.4.1. Основна ідея методу.....	98
2.4.2. Практичне застосування методу.....	106
2.5. Фрактальний аналіз фрактальних і мультифрактальних сигналів.....	112
2.5.1. Моделі фрактальних і мультифрактальних сигналів.....	113
2.5.2. Застосування методу ДинФА.....	119
2.5.3. Застосування методу КФ.....	128
2.6. Алгоритм фрактального аналізу експериментальних даних.....	135
2.7. Висновки до другого розділу.....	135
<b>РОЗДІЛ 3. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ СИГНАЛІВ.....</b>	<b>138</b>
3.1. Методи мультифрактального аналізу.....	138
3.1.1. Метод WTMM.....	138
3.1.2. Метод MF DFA.....	140
3.1.3. Нові числові характеристики.....	143

3.2. Мультифрактальний аналіз модельних фрактальних сигналів.....	145
3.2.1. Метод WTMM.....	146
3.2.2. Метод MF DFA.....	152
3.3. Мультифрактальний аналіз монофрактальних сигналів.....	163
3.4. Мультифрактальний аналіз мультифрактальних сигналів.....	163
3.5. Мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів.....	165
3.6. Метод коригуючої функції для мультифрактального аналізу.....	166
3.7. Алгоритм мультифрактального аналізу експериментальних даних....	167
3.8. Висновки до третього розділу.....	168
<b>РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ СИГНАЛІВ У ЗАДАЧАХ РАДІОФІЗИКИ ГЕОКОС-</b>	
<b>МОСУ.....</b>	<b>171</b>
4.1. Аналіз гравітаційної хвилі.....	171
4.1.1. Загальна інформація.....	171
4.1.2. Результати фрактального аналізу.....	172
4.1.3. Результати мультифрактального аналізу.....	175
4.1.4. Обговорення результатів.....	177
4.2. Аналіз інфразвукових хвиль, сгенерованих Челябінським метеорої-	
дом.....	180
4.2.1. Загальні відомості про Челябінський метеороїд.....	180
4.2.2. Результати фрактального аналізу.....	181
4.2.3. Результати мультифрактального аналізу.....	183
4.2.4. Обговорення результатів.....	187
4.3. Аналіз варіацій електромагнітного поля Землі протягом надпотужної	
магнітної бурі 7 – 8 вересня 2017 р.....	188
4.3.1. Загальні відомості про надпотужну магнітну бурю 7 – 8 вересня	
2017 р.....	189
4.3.2. Результати фрактального аналізу.....	191
4.3.3. Результати мультифрактального аналізу.....	194
4.3.4. Обговорення результатів.....	198

4.4. Аналіз варіацій електромагнітного поля Землі під час землетрусу 24 січня 2020 р. у Туреччині.....	199
4.4.1. Загальні відомості про землетрус 24 січня 2020 р.....	199
4.4.2. Результати фрактального аналізу.....	200
4.4.3. Результати мультифрактального аналізу.....	202
4.4.4. Обговорення результатів.....	208
4.5. Висновки до четвертого розділу.....	210
РОЗДІЛ 5. ДИСПЕРСІЙНІ СПОТВОРЕННЯ ФРАКТАЛЬНИХ НАДШИРО- КОСМУГОВИХ СИГНАЛІВ У НАВКОЛОЗЕМНОМУ СЕРЕДОВИЩІ.....	214
5.1. Моделювання дисперсійних спотворень.....	214
5.2. Результати моделювання дисперсійних спотворень фрактальних над- широкосмугових сигналів.....	216
5.3. Висновки до п'ятого розділу.....	222
ВИСНОВКИ.....	224
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	232
ДОДАТОК А.....	250

## СПИСОК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АВП	аналітичне вейвлет-перетворення
БВП	безперервне вейвлет-перетворення
ВЧ	високочастотний
ДВП	дискретне вейвлет-перетворення
ДГШ	дробовий гаусівський шум
ДинФА	динамічний фрактальний аналіз
ДР	дистанційне радіозондування
ЗАІМ	Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера
ЗСЧНШС	надширокосмуговий зі змінною середньою частотою
КФ	корегуюча функція
МБ	магнітна буря
МНК	метод найменших квадратів
МФС	мультифрактальний сигнал
ОПФ	одновимірне перетворення Фур'є
НДР	науково-дослідницька робота
НШС	надширокосмуговий
СКМ	система комп'ютерної математики
СМСМІАЗ	Сонце – міжпланетне середовище – магнітосфера – іоносфера – атмосфера – Земля
ССА	системний спектральний аналіз
СФ	спектральна функція
УБР	узагальнений броунівський рух
ФНШС	фрактальний надширокосмуговий
ФС	фрактальний сигнал
ФСГ	функція спектральної густини
УКНШС	ультракороткий надширокосмуговий
УФА	узагальнений фрактальний аналіз
АФА	adaptive fractal analysis

DCCA	detrended cross-correlation analysis
DEA	diffusion entropy analysis
DFA	detrended fluctuation analysis
DMA	detrended moving average
DynFA	dynamical fractal analysis
EMD	empirical mode distruction
GFA	generalized fractal analysis
HSEM	horizontal structuring element method
MF DEA	multi-fractal diffusion entropy analysis
MF DFA	multi-fractal detrended fluctuation analysis
MF DMA	multi-fractal detrended moving average analysis
MF DXA	multi-fractal detrended cross-correlation analysis
MFCCA	multi-fractal cross-correlation analysis
MFDPXA	multi-fractal detrended partial correlation analysis
MFSMXA	multi-fractal statistical moment crosscorrelation analysis
MF-HXA	multi-fractal height cross-correlation analysis
MF-X- DFA	detrended fluctuation analysis extended into multi-fractal detrended cross-correlation analysis
MF-X- DMA	detrending moving-average analysis extended into cross multi-fractal formulism
MF-X-PF	multi-fractal cross-correlation analysis based on the partition function approach
SDA	standard deviation analysis
SSC	signal summation conversion method
SWV	scaled windowed variance method
WTMM	wavelet transform modulus maxima



## ВСТУП

### Обґрунтування вибору теми дослідження

Однією з найважливіших наукових проблем, що стоїть перед сучасною людською цивілізацією, є проблема створення глобальної міжнародної системи оперативного моніторингу стану геокосмосу (див., наприклад, [1, 2]). У першу чергу, це пояснюється тим, що деякі процеси у геокосмосі, спричинені дією потужних нестационарних джерел енерговиділення, маючи часто великомасштабний, а подекуди – й глобальний (планетарний) характер, можуть становити значну загрозу безпеці, а інколи – навіть, самому існуванню, сучасною цивілізації. Першим кроком до розв’язання даної проблеми є побудова фізичної моделі таких процесів, що саме по собі є окремою складною науковою проблемою.

Згідно з нелінійною [3, 4] та системною [5] парадигми, сформульованими відповідно в 1970-х і 1980-х рр. відповідно д.ф.-м.н., професор Л. Ф. Черногором (кафедра космічної радіофізики, ХНУ імені В. Н. Каразіна, м. Харків, Україна), багато процесів у складних, відкритих, нелінійних, динамічних системах, що спричинені дією потужних, нестационарних джерел енерговиділення, можуть бути віднесені до короткочасових, нелінійних, надширококутових (НШС) і фрактальних. Такими підсистемами у складі геокосмосу в цілому є системи Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера (ЗАІМ) та Сонце – міжпланетне середовище – магнітосфера – іоносфера – атмосфера – Земля (СМСМІАЗ) (див., наприклад, [2, 6, 7]). Потужні, нестационарні джерела енерговиділення, що можуть діяти у цих системах, мають як штучне (старти та польоти ракет і потужних літаків, ядерні та потужні хімічні вибухи, нестационарне електромагнітне випромінювання і т. і.), так і природне (падіння крупних космічних тіл, землетруси, вибухи вулканів, проходження термінатора, геокосмічні бурі і т. і.) походження. Дослідження часо-частотної структури відповідних процесів вже успішно здійснюється з використанням сучасних методів, до яких належать, зокрема, вейвлет-аналіз, адаптивне перетворення Фур’є, системний спектральний аналіз, вігнер-аналіз, чої-вільямс-аналіз і т. п. (див., наприклад, [8]).

Натомість великий комплекс процесів, що виникають у системах ЗАІМ і СМСМІАЗ, цілком може мати фрактальні властивості. Більш того, з огляду на фрактальну парадигму, про появу якої говорив на початку 2000-х років д.ф.-м.н., професор В. В. Яновський (Інститут монокристалів НАН України, м. Харків, Україна) [9], фрактальність, як і нелінійність, є фундаментальною властивістю навколишнього світу взагалі. Таким чином, *задача* підвищення інформативності методів дистанційного радіозондування для радіофізичних досліджень геокосмосу із використанням методів фрактального та мультифрактального аналізів є *актуальною*.

### **Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами**

Роботу виконано на кафедрі фізики Харківського національного університета радіоелектроніки. Ряд результатів роботи було отримано протягом виконання в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна наступних науководослідницьких робіт: «Глобальні збурення, стимульовані космічною діяльністю та потужним радіовипромінюванням віддалених радіосистем, й їх екологічні наслідки» (керівник Л. Ф. Черногор, № держреєстрації 0115U000463), «Моделювання динамічних процесів в іоносфері та геомагнітному полі в період аномального 24-го циклу сонячної активності» (керівник Л. Ф. Черногор, № держреєстрації 0115U000467), «Дистанційний вплив потужного радіовипромінювання на канали телекомунікацій і електронну апаратуру» (керівник Л. Ф. Черногор, № держреєстрації 0116U000822), «Розробка методів аналізу короткочасових та надширокопосмугових процесів на основі нетрадиційних лінійних і нелінійних інтегральних перетворень» (керівник О. В. Лазоренко, № держреєстрації 0117U004872), «Глобальні та великомасштабні збурення в геокосмосі, викликані дією високоенергійних джерел, та їх екологічні наслідки» (керівник К. П. Гармаш, № держреєстрації 0118U002039), де автор обіймав посаду виконавця.

### **Мета та задачі дослідження**

*Метою* дисертаційної роботи є підвищення інформативності методів дистанційного радіозондування під час розв'язання задач фізики та радіофізики геокосмосу за рахунок використання фрактального та мультифрактального аналізів.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні *задачі*.

1. Розробка нового комплексного методу фрактального аналізу, який забезпечує різнобічну характеристику досліджуваного сигналу або процесу на базі одночасного та порівняльного вивчення комплексу фрактальних параметрів, отриманих низкою незалежних методів.

2. Створення спеціального комплексного методу фрактального аналізу, який дозволяє враховувати наявність в аналізованому сигналі часо-частотних структур і використовувати їх параметри під час оцінювання фрактальної розмірності.

3. Покращення точності оцінки фрактальних і мультифрактальних параметрів досліджуваних сигналів і процесів у методах фрактального та мультифрактального аналізів.

4. Конструювання зручних та ефективних алгоритмів фрактального та мультифрактального аналізів експериментальних даних, що можна рекомендувати до використання дослідникам, та їх перевірка з використанням модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів.

5. Отримання нової інформації про фрактальні властивості сигналів і процесів в задачах дистанційного радіозондування геокосмосу з використанням запропонованих алгоритмів фрактального та мультифрактального аналізів.

6. Оцінка дисперсійних спотворень модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів, що виникають під час їх поширення у геокосмосі.

*Об'єкт дослідження* – фрактальні та мультифрактальні процеси в задачах фізики та радіофізики геокосмосу.

*Предмет дослідження* – параметри та характеристики фрактальних і мультифрактальних сигналів і процесів в системі Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера як реакції на дію потужних нестационарних джерел енерговиділення.

*Методи дослідження*.

1. Апарат фрактального аналізу, що містить цілий набір різноманітних методів, використовувався як для теоретичного дослідження модельних фрактальних сигналів, так і для дослідження реальних експериментальних даних.

2. Методи мультифрактального аналізу застосовувалися як для теоретичного вивчення модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, так і для вивчення сигналів і процесів, отриманих у методах дистанційного радіозондування геокосмосу.

3. Метод комп'ютерного моделювання забезпечував вивчення особливостей методів фрактального та мультифрактального аналізів під час аналізу модельних сигналів і процесів.

4. Вейвлет-аналіз, оснований на застосуванні безперервного вейвлет-перетворення, використовувався для виявлення часо-часових структур як складова в новому комплексному методі фрактального аналізу сигналів і процесів.

5. Фур'є-аналіз застосовувався для оцінки дисперсійних спотворень модельних ФНШС сигналів, що виникають протягом їх поширення у геокосмосі.

### **Наукова новизна отриманих результатів**

1. Вперше створено комплексний метод фрактального аналізу сигналів і процесів – узагальнений фрактальний аналіз, що має унікальну інформативність. На реальних прикладах продемонстровано доцільність і корисність реалізації основної ідеї методу, що полягає у отриманні достатньої кількості інформації про фрактальну структуру та характер її змін у часі шляхом вивчення великого набору з шістнадцяти числових характеристик (прямих, спектральних, а також характеристик фазового простору) та їх порівняння між собою, тоді як у традиційних методах фрактального аналізу зазвичай використовуються максимум дві – три числові характеристики.

2. Вперше розроблено метод фрактального аналізу – динамічний фрактальний аналіз, який встановлює зв'язок між фрактальним і часо-частотним аналізами. Із використанням досліджень модельних і реальних сигналів і процесів доведено ефективність побудови часових залежностей фрактальних розмірностей із застосуванням параметрів часо-частотних структур, що існують у досліджуваному сигналі, шляхом обрання оптимальної ширини ковзаючого спектрального «вікна» у часовій області.

3. Вперше запропоновано метод підвищення точності числових характеристик, отримуваних у методах фрактального та мультифрактального аналізів – метод корегуючої функції. Із використанням набору спеціально створених модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів продемонстровано, що новий метод дозволяє для методів монофрактального аналізу зменшити похибку оцінювання низки фрактальних розмірностей з 24 – 50 % до 5 – 7 %, а для методів мультифрактального аналізу зменшити похибку оцінювання узагальненого показника Херста з 5 – 90 % до 3 – 8 %. Також для ємнісної, регуляризаційної, варіаційної та херстової фрактальних розмірностей завдяки методові корегуючої функції вперше отримано значення мінімальної кількості точок дискретного вектора, за яких ці розмірності можна застосовувати.

4. У рамках мультифрактального аналізу запропоновано набір нових числових характеристик, що є корисними й ефективними під час аналізу нестационарних (у сенсі фрактальних властивостей) сигналів і процесів. Корисність застосування даних характеристик доведено з використанням аналізу як модельних, так і реальних сигналів і процесів.

5. Вперше з використанням створених нових методів фрактального та мультифрактального аналізів отримано унікальну інформацію про особливості фрактальної структури низки процесів геокосмосі, які є його реакцією на дію потужних, нестационарних джерел енерговиділення (гравітаційна хвиля, падіння Челябінського метеороїда, надпотужна геокосмічна буря, потужний землетрус). Встановлено, що досліджені процеси належать до класу фрактальних надширококутних процесів.

6. Вперше виявлено характер дисперсійних спотворень високочастотних фрактальних надширококутних сигналів, що виникають у процесі їх поширення у геокосмосі.

### **Практичне значення отриманих результатів**

1. Отримана нова корисна інформація про особливості фрактальної структури низки процесів геокосмосі, які є його реакцією на дію потужних, нестационарних джерел енерговиділення (гравітаційна хвиля, падіння Челябінського метеороїда, надпотужна геокосмічна буря, потужний землетрус) може бути застосована

для успішного розв'язання проблеми створення глобальної міжнародної системи оперативного моніторингу стану геокосмосу, що стоїть перед людством.

2. Запропонований метод узагальненого фрактального аналізу є потужним інструментом детального дослідження фрактальних властивостей сигналів і процесів у найрізноманітніших галузях науки та техніки.

3. Метод динамічного фрактального аналізу вперше поєднує методи фрактального та часо-частотного аналізів. Оскільки у переважній більшості випадків вивчення нестационарної фрактальної структури сигналу або процесу дослідника цікавлять властивості певних збурень, то саме метод динамічного фрактального аналізу дозволяє, з одного боку, виявляти такі збурення й отримувати оцінки їх параметрів, а з іншого боку, саме на основі цих оцінок проводити оптимальне дослідження фрактальних характеристик.

4. Набір нових моделей фрактальних і мультифрактальних та фрактальних надширокосмугових сигналів, а також запропоновані нові мультифрактальні характеристики корисні для розв'язання різноманітних задач в області фрактальної радіофізики, фрактальної радіолокації, фрактальної радіотехніки, фрактальних телекомунікації та зв'язку, а також при застосуванні засобів фрактального та мультифрактального аналізів для моделювання та дослідження процесів у біофізиці, біології, медицині, геофізиці, екології, астрономії, тощо.

5. Метод коригуючої функції є першою спробою створення універсального засобу для розв'язання задачі підвищення точності оцінок характеристик досліджуваних сигналів і процесів в методах фрактального та мультифрактального аналізів. Більш того, у рамках цього методу вперше запропоновано чіткий підхід до оцінювання мінімальної кількості відліків дискретного вектора даних досліджуваного сигналу у випадку використання завданого методу аналізу.

6. Запропоновані алгоритми проведення фрактального та мультифрактального аналізів сигналів і процесів можна рекомендувати для практичного застосування спеціалістам у різноманітних галузях науки та техніки, що бажають використовувати сучасні фрактальні ідеї у власній професійній діяльності.

7. Оцінки характеру дисперсійних спотворень фрактальних надширокосмугових сигналів корисні для досліджень доцільності й ефективності застосування

таких сигналів для розв'язання задач радіолокації, радіонавігації, дистанційного радіозондування, телекомунікації та зв'язку тощо.

### **Особистий внесок здобувача**

Наукові результати, що наведено в дисертаційній роботі, отримано особисто автором або за його безпосередньої участі та опубліковано у роботах [10 – 29].

У роботах, що опубліковано у співавторстві, авторові належить наступне: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокосмугових сигналів [10 – 12], нові моделі фрактальних надширокосмугових сигналів і результати їх фрактального аналізу [13], результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу [14 – 16] та у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація [16, 28, 29], результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, сгенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь у аналізі їх фізичного сенсу [17, 21, 22] та розробці методу динамічного фрактального аналізу [21, 22, 28, 29], результати моделювання дисперсійних спотворень високочастотних фрактальних надширокосмугових сигналів, що виникають під час їх поширення у геокосмосі [19], результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., а також участь у аналізі фізичного змісту цих результатів [18, 20, 23], участь у розробці методу корегуючої функції для фрактального та мультифрактального аналізів, створення набору модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, комп'ютерна реалізація методу корегуючої функції, результати аналізу модельних сигналів [24], результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., а також участь у обговоренні фізичного сенсу цих результатів [25, 27], участь у розробці та комп'ютерна реалізація нових числових характеристик для мультифрактального аналізу [26].

### **Апробація результатів дисертації**

Наукові результати, що викладено у дисертаційній роботі, доповідалися на наступних 9 міжнародних, 1 національній і 1 регіональній наукових конференціях.

*Міжнародні конференції:* 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15 – 19 September, 2014, Kharkiv, Ukraine; 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, September 5 – 11, 2016, Odessa, Ukraine; VI Міжнародна науково-практична конференція (I Міжнародний симпозиум) «Практичне застосування нелінійних динамічних систем в інфокомунікаціях», 9 – 11 листопада 2017 р., Чернівці, Україна, 2017.; 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, September 4 – 7, 2018, Odessa, Ukraine; International Conference on Natural Science and Technology (ICONAT-2019), September, 18 – 20, 2019, Kharkiv, Ukraine; International Conference “Astronomy and Space Physics in the Kyiv University”, May 25 – 28, 2021, Kyiv, Ukraine; International Conference on Natural Science and Technology (ICONAT-2022), August, 24 – 26, 2022, Antalya, Turkey; International Conference “Astronomy and Space Physics”, October 18 – 20, 2022, Kyiv, Ukraine; XVIII International Conference "Electronics and Applied Physics", October 18 – 22, 2022, Kyiv, Ukraine.

*Національні конференції:* 18 Українська конференція з космічних досліджень, 17 – 20 вересня 2018 р., Київ, Україна.

*Регіональні конференції:* Підсумкова наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів, 23 – 24 березня 2016 р., ХНАУ імені В. В. Докучаєва, Харків, Україна.

### **Публікації**

За матеріалами дисертації опубліковано **20** робіт, з яких статей у спеціалізованих журналах МОН України – **7**, тез доповідей на наукових конференціях – **12**, додаткових статей у наукових журналах – **1**. Усі опубліковані наукові роботи відповідають темі дисертаційної роботи.

### **Обсяг і структура дисертації**

Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел і додатку. Загальний обсяг дисертації становить 254 сторінки, з яких 183 сторінки основного тексту. Список використаних джерел на 18 сторінках містить у собі 207 найменувань. Разом у дисертації 70 рисунків, 16 таблиць.



## РОЗДІЛ 1.

### ФРАКТАЛИ, ФРАКТАЛЬНИЙ І МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

#### 1.1. Основні поняття та визначення

##### 1.1.1. Виникнення фрактального підходу

Поняття «фрактал» вперше введено видатним американським вченим Б. Мандельбротом в 1975 р. в книзі [30], що була опублікована французькою мовою.

Сам термін «фрактал» походить від латинського слова *fractus* – фрагментований, неправильний за формою, дроблений, ламаний, розбитий [30 – 32].

Основна ідея, запропонована й обґрунтована Б. Мандельбротом в [32], полягає у тому, що в багатьох випадках для коректного й адекватного описання навколишнього світу можливостей традиційної геометрії Евкліда явно не вистачає, а тому слід застосовувати принципово новий підхід – фрактальну геометрію.

У якості підґрунтя фрактального підходу можна розглядати (див, наприклад, [33]) роботи Л. Башельє, А. С. Безіковича, Б. Больцано, Р. Броуна, К. Вейєрштрасса, Н. Вінера, В. Вольтерра, Ф. д'Альба, Ж. Дарбу, П. Дюбуа-Реймонда, А. Ейнштейна, Г. Жюліа, Г. Кантора, А. Келі, Х. фон Коха, А. Лебега, П. Леві, К. Менгера, В. Ф. Остгуда, Дж. Пеано, Ж. Б. Перрена, А. Пуанкаре, Г. Римана, Л. Ричардсона, Ш. Селлер'є, В. Ф. Серпинського, Г. Дж. Сміта, П. С. Урисона, П. Фату, Ф. Хаусдорфа, Г. Херста, Е. Чезаро, Дж. Ципфа та багатьох інших, що присвячено, зокрема, фрактальним розмірностям [31, 32, 34], безперервним, але ніде не диференційовним функціям (див., наприклад, [35]), теорії хаосу (див., наприклад, [36 – 39]), дослідженням броунівського руху (див., наприклад, [36, 40]), фрактальним геометричним об'єктам, ітерованим відображенням і функціям (див., наприклад, [41]) і т. і.

На думку авторів [33], феноменальна та безперечна заслуга Б. Мандельброта у створенні фрактального підходу у науці за загальним змістом є подібною до заслуги Дж. Максвелла у електродинаміці. Б. Мандельброт зібрав разом та узагальнив

різні підходи, що було створено до нього, а також збагатив їх багатьма власними оригінальними ідеями.

Саме на базі розглянутого визначного досягнення Б. Мандельброта на сьогодні сформовано так звану *фрактальну парадигму* (див., наприклад, [9, 42, 43]), у межах якої встановлено, що фрактальність є однією з *фундаментальних властивостей* навколишнього світу.

У формуванні фрактального підходу прийнято виділяти чотири етапи [33]: 1) *епоха «монстрів»* (середина XIX сторіччя – початок 1960-х рр.), 2) *підготовчий етап* (початок 1960-х рр. – 1975 р.), 3) *етап становлення та розвитку* (1975 р. – початок 2000 рр.) і 4) *сучасний етап* (початок 2000-х рр. – сьогодні).

Фрактальні структури виявлено у самих різних галузях людської діяльності: у фізиці (див., наприклад, [44 – 48]), астрономії (див., наприклад, [46, 49]), електроніці (див., наприклад, [50, 51]), обробці сигналів і зображень (див., наприклад, [52]), комп'ютерних мережах (див., наприклад, [49, 50, 53]), хімії (див., наприклад, [46, 53]), фізичній хімії (див., наприклад, [54]), біології, фізіології, психіатрії (див., наприклад, [43, 46, 52, 55 – 57]), біофізиці (див., наприклад, [58]), біохімії (див., наприклад, [59]), медицині (див., наприклад, [43, 56, 57, 60]), геології (див., наприклад, [61 – 63]), географії (див., наприклад, [64]), геофізиці (див., наприклад, [62, 65 – 67]), геохімії (див., наприклад, [68]), кліматології (див., наприклад, [61]), метеорології (див., наприклад, [61]), ґрунтознавстві (див., наприклад, [69]), екології (див., наприклад, [64]), комп'ютерних науках (див., наприклад, [70]), фінансах (див., наприклад, [49, 71, 72]), археології (див., наприклад, [56]), архітектурі та дизайні (див., наприклад, [73]), матеріалознавстві (див., наприклад, [74]) і навіть у музиці та літературі (див., наприклад, [75]), живопису (див., наприклад, [49, 75, 76]), міській культурі [77], психології [78], менеджменті [79] та інших гуманітарних і соціальних науках [80]. Істотний внесок до процесу «фракталізації» зробили С. Александер, К. Бандт, М. Барнслі, Ю. Барішев, А. Бунде, Т. Вічек, А. К. Гільмутдінов, Ж.-Ф. Гойє, П. Грассбергер, Р. Девейні, С. Демко, Д. Заупе, М. Зеєле, Й. Каандорп, Б. Кайє, Р. Кроновер, Л. Лейбович, А. Ле Мехот, Н. Лесмо-Гордон, А. Лінденмайєр, Л. Лем, М. Макгуайєр, П. Мікін, Р. Ш. Нігматулін, Р. Орбах,

Х.-О. Пайтген, Дж. Парізі, А. А. Потапов, І. Прокаччіа, П. Ріхтер, А. Слоан, Б. М. Смірнов, Я. Стюарт, Х. Такаюцу, Г. Уорнелл, К. Фалконер, Й. Федер, Ю. Фішер, Р. Фосс, У. Фріш, К. Фрейзер, А. Хек, С. Хевлін, Б. Шаповал, М. Шредер, Д. Штауффер, Д. Евнір, Х. Юргенс і багато інших вчених.

Поява та практичне застосування реальних технологій, що ґрунтуються на фрактальному підході, перетворили фрактали з чисто математичної ідеї на потужну силу, здатну змінювати навколишній світ.

### ***1.1.2. Визначення фрактала***

Вперше визначення фрактала було сформульовано Б. Мандельбротом у 1982 р. у роботі [32].

*Визначення 1 (Мандельброт, 1982 р.).* Фрактал – це множина, розмірність Хаусдорфа – Безіковича якої є строго більшою за його топологічну розмірність.

Згодом Б. Мандельброт його декілька разів корегував [81 – 84].

*Визначення 2 (Мандельброт, приблизно середина 1980-х рр.).* Фрактал – це множина, розмірність Хаусдорфа – Безіковича якої не дорівнює його топологічній розмірності.

*Визначення 3 (Мандельброт, 1987 р.).* Фрактал – це певна структура, що побудована з подібних собі підструктур.

*Визначення 4 (Мандельброт, 1989 р.).* Фрактал – це набір засобів і методів для вивчення нерегулярних, ламаних і самоподібних геометричних об'єктів.

До речі, саме в 1989 р. Б. Мандельброт зазначив, що будь-яке визначення фрактала завжди залишатиметься обмеженим [81, 85].

Інші вчені, зокрема Х. Лавер'є [85] і К. Фалконер [81, 83, 86, 87] також робили спроби дати вичерпне визначення фрактала.

*Визначення 5 (Лавер'є, 1990 р.).* Фрактал – це геометрична фігура, к якій один і той самий фрагмент повторюється під час кожної зміни масштабу.

*Визначення 6 (Фалконер, 1990 р.).* Множину  $R$  називають фракталом, якщо серед її властивостей наявні такі:

- множина  $R$  має тонку структуру, тобто вона є деталізованою на найменших масштабах;
- множина  $R$  є достатньо нерегулярною структурою, щоб її можна було б описати традиційними геометричними способами (геометрії Евкліда або Лобачевського) як на локальному рівні, так і на рівні всієї структури;
- множині  $R$  є властивою самоподібність як у наближеному вигляді, так і в статистичному;
- зазвичай фрактальна розмірність множини  $R$  (що її визначено будь-яким чином) виявляється більшою за її топологічну розмірність;
- у більшості випадків множина  $R$  визначається в дуже простий спосіб, можливо, рекурсивно.

В 1996 р. К. Фалконер додав до останнього визначення фрактала ще одну властивість [88]:

- часто множина  $R$  має природне походження.

Таким чином, на сьогодні загально визнаного універсального визначення фрактала не існує. Але найбільш вдалим і вживаним вважається саме визначення К. Фалконера (див., наприклад, [33]). Більш того, Б. Мандельброт фактично визнав це, коли в 1999 р. в роботі [89] відмовився від спроб створити строге математичне визначення поняття «фрактал». З цією його позицією погодилися найпровідніші фахівці – фрактальники на спеціалізованій міжнародній науковій конференції, що відбулася у 2013 р. [35]. Слід також додати, що сам К. Фалконер зазначав [81], що його визначення побудовано за тим саме принципом, за яким у біології визначається поняття «життя».

### ***1.1.3. Евклідова, топологічна та хаусдорфова розмірності***

Евклідова розмірність  $E$ , яку зазвичай розуміють як кількість незалежних координат, добре підходить для описання просторів, але є повністю неефективною для інших, навіть дуже простих, об'єктів. Саме тому у 1875 р. (див., наприклад, [32, 46, 83, 90]), тому було започатковано створення теорії топологічної розмірності.

Значний внесок до створення цієї теорії в 1875 – 1925 рр. внесли А. Пуанкаре, Л. Брауер, А. Лебег, К. Менгер і П. Урисон. Найбільш вживаним є метричне визначення топологічної розмірності, введене А. Лебегом (див., наприклад, [85]).

*Визначення (Лебег).* Множина  $R$  має топологічну розмірність  $n$ , якщо  $n$  – це таке найменше ціле число, що для довільного додатного  $\varepsilon$  існує скінченна система замкнених множин з діаметрами, які не перевищують  $\varepsilon$  і покривають множину  $R$ , жодні  $n + 2$  множин з яких не мають спільної точки.

Важливо зазначити, що ані евклідова розмірність  $E$ , ані топологічна розмірність  $D_T$  (саме так ми надалі позначатимемо її у даній роботі) під час створення не мали жодного відношення до фракталів.

Розвитком ідей А. Лебега став підхід Ф. Хаусдорфа до визначення розмірності множини метричного простору (див., наприклад, [33, 34, 85, 91]). Його ідея полягає у тому, щоб покрити досліджувану множину іншими множинами з розміром  $\eta$  і поставити їй у відповідність деяку міру. Тоді для описання даної множини можна ввести так звану *розмірність Хаусдорфа*.

*Визначення (Хаусдорф).* Розмірність Хаусдорфа  $D_H$  множини точок  $R$  – це критична розмірність  $d$  міри  $M_d$ , за якої міра приймає скінченне значення:

$$H_d = \lim_{\eta \rightarrow 0} M_d = \lim_{\eta \rightarrow 0} \sum \gamma(d) \eta^d = \begin{cases} 0, & d > D_H; \\ \text{const}, & d = D_H; \\ \infty, & d < D_H. \end{cases}$$

Величину  $H_d$  називають *мірою Хаусдорфа* множини точок  $R$ . Міра  $M_d$  визначається як  $M_d = \sum \gamma(d) \eta^d$ , де сума обчислюється по частинах покриттів, що не перетинаються, а коефіцієнт  $\gamma(d)$  залежить від геометричних властивостей елементів, якими покривають множину  $R$ . Величину  $d$  називають *розмірністю міри*.

Може виникнути ситуація, коли числа  $d = D_H$  не існує, тобто коли міра Хаусдорфа  $H_d$  не має скінченного, ненульового значення. Тоді для характеристики

множини точок  $R$  використовується величина  $D_{HB} = \inf[d : H_d = 0]$ , тобто мінімальне значення  $d$ , яке перетворює міру Хаусдорфа  $H_d$  на нуль. Величину  $D_{HB}$  називають *розмірністю Хаусдорфа – Безіковича*.

Щодо розмірності Хаусдорфа – Безіковича, то тут надважливими є два факти. По-перше, розмірність Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  може набувати нецілих значень, тоді як топологічна розмірність  $D_T$  обмежується лише цілими значеннями. По-друге, нижня границя розмірностей Хаусдорфа – Безіковича для всіх метрик, що можна ввести на множині точок  $R$ , дорівнює її топологічній розмірності:  $D_T(R) \leq D_{HB}(R)$ . Отже, саме розмірність Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$ , яку часто називають просто *хаусдорфовою розмірністю*, було запропоновано Б. Мандельбротом в [32] застосовувати для описання фрактальних множин.

Таким чином, слід запам'ятати, що топологічна розмірність  $D_T$ , розмірності Хаусдорфа  $D_H$  і Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  застосовують для описання самого об'єкта, а евклідову розмірність  $E$  – тільки простору, в який даний об'єкт занурено.

## 1.2. Фрактали у математиці, фізиці та радіофізиці

### 1.2.1. Математичні та фізичні фрактали

Всі фрактали за походженням можна поділити на математичні та фізичні (або природні) (див., наприклад, [21, 33, 36]).

Математичний фрактал – це деякий абстрактний об'єкт, що створено математиками та який існує лише в їх уяві. Прикладами математичних фракталів є множина Кантора, тріадна крива та сніжинка Коха, трикутний невід, килим, серветка та піраміда Серпинського, губка Менгера, троїчна фрактальна піна, криві Пеано, крива Госпера, дракон Хартера–Хейтуэя, всесвіт Фурньє, множини Мандельброта та Жюліа і т. і. (див., наприклад, [31, 81]).

Фізичний фрактал – це об'єкт реального світу, що існує у природі незалежно від людини та її знань про нього. Фізичні фрактали можуть мати як природне, так і

штучне (техногенне) походження. Останні інколи називають також *синтетичними фракталами* [92]. Прикладами фізичних фракталів є форми рослин і дерев, сніжинок і хмарин, поверхні пустелі та берегової лінії морів та океанів, русел річок і гірських хребтів, забарвлення деяких птахів (павлін) і тварин (ягуар), форми фрактальних антен і траєкторій броунівських часток, а також багато іншого [33].

Як математичні, так і фізичні фрактали прийнято ділити (див., наприклад, [33]) на детерміновані (або регулярні) та стохастичні (або нерегулярні випадкові).

*Регулярним* називають фрактал, для якого існує повністю детермінований алгоритм його створення. Регулярний фрактал має властивість самоподібності (або у більш загальному випадку – самоафінності), тобто під час його розгляду на меншому масштабі отримують просто зменшену точну копію початкового фрактала (з урахуванням можливості використання операцій повороту та масштабування з різними коефіцієнтами подібності уздовж ортогональних осей), або властивість приблизної самоподібності (або самоафінності), коли згадана властивість виконується лише приблизно (див., наприклад, [88]).

Регулярні фрактали прийнято поділяти на геометричні й алгебраїчні. У геометричних фракталів самоподібність (або самоафінність) спостерігається у самій геометричній структурі, а у алгебраїчних – у самоподібності (або самоафінності) тих чи інших їх числових характеристик.

*Стохастичні* фрактали докорінно відрізняються від регулярних тим, що в алгоритмі їх створення завжди є присутнім принаймні один випадковий параметр. Важливо, що стохастичний фрактал є статистично самоподібним (або самоафінним). Останнє означає, що властивість самоподібності (або самоафінності) має якась не випадкова числова характеристика, а не сам фрактал. Тому формально такий фрактал точно самоподібним (або самоафінним) не є взагалі.

Як правило, більшість фізичних фракталів є стохастичними, але не всі. Наприклад, сніжинка може бути віднесена до регулярних геометричних фракталів. Тому немає символу тотожності між фізичними та стохастичними фракталами [33].

Головна відмінність між математичними та фізичними фракталами полягає у тому, що фізичні фрактали формально не задовольняють жодному з наведених

вище визначень фрактала. Справа полягає у тому, для математичного фрактала існує скінченний максимальний масштаб, але мінімальний масштаб дорівнює нулю. Отже, кількість ітерацій в алгоритмі побудови такого фрактала є принципово нескінченною. Натомість фізичний фрактал має як скінченний максимальний, так і скінченний мінімальний масштаби. Б. Мандельброт в [31, 32] називає це *зовнішнім і внутрішнім порогами* відповідно. Кількість ітерацій алгоритма побудови фізичного фракталу є обмеженою.

У деяких окремих роботах (див., наприклад, [82, 93]) фрактальний об'єкт, що побудовано з використанням обмеженої кількості ітерацій, називають *предфракталом*. Отже, формально будь-який фізичний фрактал є предфракталом. Але слід зазначити, що така термінологія не витримала перевірки часом.

### ***1.2.2. Монофрактали та мультифрактали***

*Монофрактал* – це фрактал, для описання якого вистачає тільки одного значення фрактальної розмірності (див., наприклад, [53]).

Найбільш відомими методами побудови регулярних геометричних фракталів [33] є метод генератора (див., наприклад, [31]), метод систем ітерованих функцій [40, 41, 81, 94], метод випадкових ітерацій (або гра у хаос) (див., наприклад, [39 – 41, 53]), метод ігри в хаос з поворотами (див., наприклад, [41]), метод стискаючих афінних перетворень (див., наприклад, [41]) і метод нелінійних комплексних відображень (див., наприклад, [95]).

Ці методи можуть бути модифіковані для побудови стохастичних (нерегулярних, випадкових) фракталів [81, 87, 91]. Для цього достатньо ввести у відповідні алгоритми один або декілька випадкових параметрів. Б. Мандельброт назвав такі фрактали *«уніфракталами»* [67, 89].

Окремий клас монофракталів складають так звані *«товсті»* (або *«жирні»*) фрактали [40]. Вони відрізняються від розглянутих вище тим, що для них міра Хаусдорфа  $H_d$  може приймати скінченне значення. Важливо, що розмірність Ха-



усдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  для товстих фракталів завжди дорівнює евклідовій розмірності  $E$  простору, куди цей фрактал занурено. Саме цьому товсті фрактали прийнято описувати з використанням *показників скейлінга* [40].

*Мультифрактал* – це фрактал, для описання якого необхідно використовувати більше, ніж одне значення фрактальної розмірності (див., наприклад, [40]).

Мультифрактали є неоднорідними фракталами, тоді як монофрактали – однорідними. На відміну від монофракталів мультифрактали крім геометричних властивостей, пов'язаних із фрактальною розмірністю  $D$ , мають також певні статистичні властивості, для описання яких слід вводити відповідні окремі числові характеристики (див., наприклад, [40]). Подібно монофракталам, за походженням мультифрактали можна поділити на математичні та фізичні.

Наочним прикладом математичного мультифрактала є неоднорідна канторова множина, що є результатом так званого мультиплікативного процесу або процесу Безіковича [85]. Цей мультифрактал Б. Мандельброт назвав біноміальним мультифракталом [67]. Іншими відомими прикладами є неоднорідна серветка Серпінського та мультифрактал, побудований за ренормалізаційною схемою. Ці приклади докладно розглядаються у роботі [33].

У якості прикладів фізичних мультифракталів можна розглядати, зокрема, процеси на переході Андерсона (перехід метал – діелектрик), багато середовищ і процесів у геофізиці [48, 61, 65, 82], процеси руйнування геологічних структур (наприклад, землетрус – це явище фрактального руйнування [63]), структури, що виявлено під час вивчення турбулентності (див., наприклад, [48, 75]), у фінансовій сфері (див., наприклад, [71, 75]), у кліматології (див., наприклад, [75]) тощо.

Як і у випадку монофракталів, існують регулярні (детерміновані) та стохастичні (випадкові) мультифрактали. Для отримання стохастичного математичного мультифрактала потрібно до повністю детермінованого алгоритма, за яким будується регулярний мультифрактал, додати принаймні один випадковий фактор [67]. Зазначимо, що переважна більшість фізичних мультифракталів є саме стохастичними мультифракталами.

### 1.2.3. Фрактальна радіофізика

Процес «фракталізації» не оминув і сучасну радіофізику. У 2002 р. з'явився новий потужний напрямок – фрактальна радіофізика, теперішній стан якого докладно розглянутий у ґрунтовному огляді [33, 96]. Поява фрактальної радіофізики є принципово новим етапом її розвитку.

Серед напрямків сучасної фрактальної радіофізики виділяють цифровий фрактальний аналіз та обробку сигналів і зображень; дослідження фрактальних поверхонь (наприклад, морської поверхні); теорію розсіяння хвиль фрактальною поверхнею; теорію поширення радіохвиль у фрактальних середовищах; вивчення фрактальних властивостей просторових структур геосистем; дослідження фрактальних структур у космічній радіофізиці та космології; вивчення фрактальних флуктуацій радіохвиль у тропосфері й іоносфері; дослідження фрактальних характеристик блискавок в іоносфері; створення фрактальних радіоелементів та імпедансів в різних діапазонах частот, зокрема, аналіз і синтез фрактальних антен; використання фрактальних сигнатур у задачах статистичної радіофізики; створення фрактальних селективних і радіопоглинаючих матеріалів (метаматеріали та наноструктурні фрактальні композити); проектування фрактальних радіосистем і пристроїв; синтез РС-кіл, які реалізують дробові оператори; виявлення малокоонтрасних цілей і розпізнавання їх контурів з використанням фракталів і т. і. (див., наприклад, [91, 97]).

Також слід зазначити, що наприкінці 1990-х рр. створено *фрактальну електродинаміку* [98], що базується на застосуванні у радіофізиці дробового числення (*fractional calculus*) (див., наприклад, [85, 99]), яке приблизно з 2015 р. вже називають фрактальним численням (*fractal calculus*) (див., наприклад, [91, 100]). Термін «фрактальна електродинаміка» введено Д. Л. Джаггардом в 1990 р. [101].

Ще один потужний зв'язок між фракталами та радіофізикою встановлюють нелінійна [3, 4] та системна [5] парадигми. Згідно з ними, процеси у складних, відкритих, нелінійних, динамічних системах, спричинені дією потужного, нестационарного джерела енерговиділення, можуть бути віднесені до короткотермінових, нелінійних, надширококутових і фрактальних. Однією з таких систем є геокосмос, а згадані потужні джерела збурень у ньому можуть мати як природне (наприклад,

польоти та падіння космічних тіл, сонячні спалахи, землетруси, вибухи вулканів, проходження термінатора і т. і. ), так і штучне (наприклад, потужні хімічні й ядерні вибухи, старти ракет, польоти потужних літаків і космічних апаратів, робота потужних радіотехнічних комплексів і т. і.) походження. Саме тому для підвищення інформативності методів ДР геокосмоса вкрай необхідно використовувати методи фрактального та мультифрактального аналізу, про що саме йдеться у даній дисертаційній роботі.

Підбиваючи підсумки, можна сподіватися, що нові геометричні та топологічні уявлення фрактального аналізу у сукупності з дробовим численням у майбутньому стануть такою ж невід'ємною частиною аналізу сигналів, полів і хвиль в науці та техніці, якою став фур'є-аналіз [33].

Натомість варто також, висловлюючи застереження від надмірних очікувань щодо фракталів, навести слова Б. Мандельброта: «Фрактали не є панацеєю. Я зовсім не рекомендую фрактальні методи всім підряд і вже тим більш ніколи не намагався нав'язувати їх кому б то не було» [71].

### 1.3. Числові характеристики монофракталів

#### 1.3.1. Фрактальна розмірність математичного фрактала

Основною числовою характеристикою будь-якого фрактала є фрактальна розмірність  $D$  [31]. Але у різних випадках під цим терміном розуміються подекуди зовсім різні речі. Так, для математичних фракталів автор терміна «фрактальна розмірність» Б. Мандельброт у переважній більшості випадків ототожнював її з розмірністю Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  [31], тобто  $D = D_{HB}$ . Більш того, він був вкрай невдоволений [102], коли в 1981 р. С. Tricot [103], розвиваючи ідеї самого Б. Мандельброта, запропонував для описання математичних фракталів цілих дванадцять нових фрактальних розмірностей, відомих як *розмірності упаковки (packing dimensions)* [86, 87, 104].

У той самий час з'ясувалося, що обчислення розмірності Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  безпосередньо за визначенням є вкрай незручним для практичного застосування. Тому було створено наступний спрощений алгоритм [104].

Нехай досліджуваний об'єкт перебуває у евклідовому просторі з розмірністю  $E$ . Покриємо цей об'єкт  $E$ -вимірними «кулями» радіуса  $l$ . Нехай для цього нам потрібно не менше, ніж  $N(l)$  таких куль. Тоді за досить малих  $l$  величина  $N(l)$  підкоряється степеневому закону:

$$N(l) \sim \frac{1}{l^D}. \quad (1.1)$$

Величина  $D$  є саме фрактальною розмірністю даного об'єкта. Вона дорівнює його розмірності Хаусдорфа – Безіковича:  $D = D_{HB}$ .

Формулу (1.1) можна переписати у вигляді:

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}. \quad (1.2)$$

Формулу (1.2) зазвичай на практиці й використовують для визначення фрактальної розмірності  $D$ . Цю фрактальну розмірність інколи називають *об'ємною розмірністю* множини [105]. Важливо, що величина  $D$  є *локальною* характеристикою даного об'єкта, тобто об'єкт може бути як однорідним (монофракталом), так і неоднорідним (мультифракталом). У першому випадку значення  $D$  в усіх точках об'єкта є однаковими, а в другому вони можуть бути різними.

Додамо, що для нефрактального об'єкта фрактальна розмірність  $D$  дорівнює його топологічній розмірності  $D_T$  (див., наприклад, [33]).

### ***1.3.2. Фрактальна розмірність фізичного фрактала***

Як зазначалося вище, фізичні фрактали, з якими мають справу дослідники-практики в різних галузях науки та техніки, відрізняються від математичних фракталів. Існують також відмінності у числових характеристиках, що застосовуються для фізичних фракталів. Встановлено [36], що для фізичних фракталів є недоцільним використовувати розмірність Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$  у вигляді фрактальної розмірності  $D$ . Підтверджуючи цей факт, Б. Мандельброт в [31] говорить про необхідність застосування для фізичних фракталів деякої *ефективної розмірності*  $D$ , але підкреслює, що їй не слід давати точного визначення.

Останнє, на наш погляд, призвело до виникнення певного безладу та плутанини, коли різні автори під терміном «фрактальна розмірність» розуміють абсолютно різні числові характеристики, які інколи навіть порівнювати не можна (див., наприклад, [36]). Тому для коректного представлення результатів аналізу фізичних фракталів слід вказувати, яка саме фрактальна розмірність використовувалася [33].

Важливо, що будь-яка фрактальна розмірність кількісно описує *ступінь заповнення* фракталом простору, в який його занурено [82].

На сьогодні для описання фізичних фракталів використовується велика кількість різних фрактальних розмірностей, а також багато методів, якими ці розмірності можна обчислювати [33]. Останні, відомі як методи фрактального та мультифрактального аналізів, окремо розглядаються у підрозділах 1.6 і 1.7 відповідно.

Через обмежений дозволений об'єм даного аналітичного огляду обмежимося розглядом лише найголовніших характеристик фрактальних розмірностей [33].

1) Кластерна розмірність  $D_K$ , яка також є відомою як *розмірність подібності*, а також *фрактальна (дробова) розмірність* [36, 39, 46, 87, 90]. Різновидом кластерної розмірності є також *щілинна розмірність*, введена Б. Мандельбротом як узагальнення розмірності подібності для самоафінних структур [106]. Відмінність кластерної розмірності від розмірності Хаусдорфа – Безіковича полягає в тому, що оскільки залежність між кількістю куль  $N(\delta)$ , які покривають фрактал, та лінійним розміром кулі  $\delta$  має реальний сенс тільки при  $\delta > R_0$  ( $R_0$  – мінімальний масштаб кластера), кластерна розмірність описує лише тенденцію зростання величини  $N(\delta)$  при зменшенні  $\delta$ . Але, строго кажучи, фізичні фрактали й є фрактальними кластерами, а тому кластерна розмірність для них є вкрай корисною.

2) Ємнісна розмірність  $D_C$  [47, 86], відома також як *ємність* [36, 37, 46, 52], *ентропійна розмірність* [107], *колмогорівська розмірність*, *колмогорівська ентропія* [87], *розмірність покриття (covering dimension)* [41, 104], *кліткова розмірність (box dimension або box-counting dimension)* [39 – 41, 55, 81, 82, 87, 88, 90], *об'ємна розмірність* [105], *розмірність Фростмана* [31], *метрична розмірність* [87], *лога-*

*рифмічна густина* [87] або *дробова розмірність (fractional dimension)* [81]. До ємнісної розмірності також зводиться розмірність, введена Мінковським [108] у 1901 р., узагальнена для фракталів Буліганом [109] у 1928 р. і відома як *розмірність Мінковського* [81], *розмірність Мінковського-Булігана* [40, 86, 104] чи *розмірність Кантора-Мінковського-Булігана* [41]. У більшості випадків ємнісна розмірність  $D_C$  співпадає з розмірністю Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$ , але не завжди [31, 102]. Формально ємнісна розмірність  $D_C$  має використовуватися тільки для математичних фракталів, тоді як для фізичних фракталів існує її аналог (у певному сенсі) – кластерна розмірність  $D_K$ . Незважаючи на це, дуже часто (див, наприклад, [55]) багато відомих спеціалістів, хоча насправді й обчислюють кластерну розмірність  $D_K$ , говорять про неї як про  $D_C$ ,  $D_{HB}$  або навіть просто про фрактальну розмірність  $D$ .

3) Поточкова розмірність  $D_P$  [37, 85]. На відміну від розмірності Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$ , кластерної  $D_K$  та ємнісної  $D_C$  розмірностей, що оцінюються з використанням всього фрактального об'єкта, а тому є *нелокальними*, поточкова розмірність  $D_P$  має *локальний характер*, оскільки обчислюється в деякій околі обраної точки. Поточкова розмірність  $D_P$  задається співвідношенням [37]:

$$D_P = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(N(r) / N_0)}{\ln r}, \quad (1.4)$$

де  $N_0$  – кількість точок досліджуваного фрактального об'єкта,  $r$  – радіус кулі, що описується навколо обраної фіксованої точки об'єкта,  $N(r)$  – кількість точок об'єкта, що потрапили у середину побудованої кулі. Для фізичних фракталів поточкова розмірність  $D_P$ , подібно до кластерної розмірності  $D_K$ , реально обчислюється для  $r > R_0$ , хоча й призначена описувати тенденцію при  $r \rightarrow 0$ .

Також є важливим те, що для монофракталу величина  $D_P$  є однаковою для всіх точок. Але може виявитись, що отримана величина  $D_P$  залежить від обрання

фіксованої точки. Таке спостерігається для неоднорідного фракталу, тобто мультифракталу. В останньому випадку для характеристики об'єкта в цілому (або певної його частини) можна оцінити *усереднену поточкову розмірність*  $\langle D_P \rangle$  [37]:

$$\langle D_P \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M D_P(\vec{x}_i), \quad (1.5)$$

де  $M$  – кількість точок об'єкта ( $M < N_0$ ), що обираються випадковим чином і в яких за формулою (1.4) обчислюється поточкова розмірність  $D_P(\vec{x}_i)$ ,  $\vec{x}_i$  – радіус-вектор, що задає положення  $i$ -ої точки досліджуваного об'єкта.

4) Кореляційна розмірність [37, 46, 85, 90, 110]. Як і поточкова розмірність, має локальний характер. Існує декілька алгоритмів обчислення, але самим ефективним вважається *алгоритм Грассбергера – Прокаччи* [110, 111]. Згідно йому кореляційна розмірність  $D_G$  задається співвідношенням:

$$D_G = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r},$$

де  $C(r)$  – кореляційний інтеграл (кореляційна функція, кореляційна сума). Він обчислюється, як й у випадку поточної розмірності  $D_P$ , для фіксованої точки  $\vec{x}_i$ , навколо якої будується куля радіуса  $r$  і підраховується кількість точок об'єкта, що потрапила до цієї кулі, з використанням співвідношення:

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^N H(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|), \quad H(s) = \begin{cases} 1, & s > 0; \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

де  $H(s)$  – функція Хевісайда.

Деякий час алгоритм Грассбергера – Прокаччи вважався одним з найпростіших та ефективніших алгоритмів оцінювання фрактальних розмірностей [110].

5) Інформаційна розмірність [37, 46, 85, 90]. Покриємо досліджувану множину точок  $N$  кулями з радіусом  $\varepsilon$ . Кількість точок множини в кожній окремій комірчині дорівнює  $N_i$ . Ймовірність точки потрапити у дану комірчину складає:

$$P_i = \frac{N_i}{N_0}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \sum_{i=1}^N P_i = 1,$$

де  $N_0$  – загальна кількість точок у вихідній досліджуваній множині.

*Інформаційна ентропія* задається співвідношенням:

$$I(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^N P_i \log P_i.$$

*Інформаційна розмірність* має вигляд:

$$D_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N P_i \log P_i}{\log \varepsilon}.$$

Встановлено [90], що  $D_G \leq D_I \leq D_C \leq D_{HB}$ , тобто інформаційна та кореляційна розмірності обмежують ємнісну розмірність знизу, а остання – розмірність Хаусдорфа – Безіковича.

6. Узагальнені розмірності Реньї. Узагальнені розмірності, або розмірності Реньї, запропоновано використовувати П. Грассбергером, Х. Хентчелом та І. Прокаччи [83, 111] використовувати в нелінійній динаміці в 1983 р., хоча створені вони були ще у 1961 р. угорським математиком А. Реньї зовсім з іншою метою в теорії інформації [112]. Докладно вони розглядаються у пункті 1.4.2.

7. Гомотетична розмірність  $D_S$  [36, 82]. Її інколи також називають *розмірністю подібності* [31, 32, 56, 75, 81, 82], що приводить до певною плутанини, оскільки інколи так саме називають й кластерну розмірність. Гомотетичну розмірність можна обчислювати лише для строго самоподібних множин, що у випадку фізичних фракталів трапляється вкрай рідко.

8. Глобальна розмірність. Б. Мандельброт встановив [82, 85], що навіть для найпростіших самоафінних фракталів фрактальну розмірність не можна визначити однозначно. Проблема полягає у наступному. Коли для фізичного фрактала обчислюється кластерна розмірність  $D_K$ , то очікується, що вона буде оцінкою ємнісної розмірності  $D_C$ , тобто  $D_K = D_C$ . І це дійсно є саме так, коли для покриття



фракталу використовуються комірки, розмір яких є значно меншим за характерні розміри самого фракталу. Але якщо це не так хоча б по одній координаті, то, наприклад, для самоафінної кривої, якою є, зокрема, одновимірний сигнал, спостерігається  $D_K = 1 \neq D_C$ . В цьому випадку  $D_K = D_{C_{gl}} = 1$ , де  $D_{C_{gl}}$  – глобальна ємнісна розмірність даної кривої, яку інколи називають просто *глобальною розмірністю*. З цього постає, що самоафінна крива нефрактальна у глобальному сенсі. Саме тому введено вище ємнісну розмірність  $D_C$  вважають *локальною ємнісною розмірністю*. Для самоафінних кривих вона пов'язана з показником Херста  $H$ , який розглядається нижче, співвідношенням  $D_C = 2 - H$ .

9. Внутрішня розмірність  $D_D$  [82, 85], яку інколи також називають *прихованою фрактальною розмірністю* [82]. Її обчислення базується на вимірюванні довжини фрактальної кривої з використанням деякої еталонної лінійки з відомою довжиною  $\delta$ . Існують глобальна  $D_{D_{gl}}$  і локальна  $D_D$  внутрішні розмірності. Відомо, що для самоафінної кривої  $D_{D_{gl}} = 1$ ,  $D_D = 2 / H$ .

10. Масова розмірність  $D_m$  [40, 46, 82, 90]. Вперше була введена для описання фізичного фрактала, відомого як *фігура Ліхтенберга*. Існують *глобальна* та *локальна* масові розмірності. Для самоафінних фракталів вони, як правило, співпадають з відповідними глобальною та локальною ємнісними розмірностями. Для самоподібних математичних фракталів масова розмірність  $D_m$  співпадає з їх розмірністю Хаусдорфа – Безіковича. У випадку ж фізичних фракталів вона здебільшого співпадає з кластерною й ємнісною розмірностями [90, 106].

11. Розмірність, що ґрунтується на евристиці Ліпшиця – Гельдера  $D_{LG}$  [31, 89]. Вона оцінюється для фрактальних сигналів і базується на *локальному показнику Ліпшиця – Гельдера*  $\alpha$  досліджуваного сигналу. Спосіб її оцінки відомий як *евристика Ліпшиця – Гельдера*. Б. Мандельброт вважає, що розмірність  $D_{LG}$  є еквівалентною поточковій розмірності  $D_P$ , хоча й використовується інший алгоритм.

12. Розмірність, що ґрунтується на показникові Херста  $D_H$  [31]. Дана розмірність є тісно пов'язаною з показником Херста  $H$  простим співвідношенням  $D_H = 2 - H$  і базується на моделі узагальненого броунівського руху.

13. Розмірність Фур'є  $D_F$  [37, 46, 81, 87, 90], відома також як спектральна розмірність [85]. Відомо, що енергетичний спектр Фур'є  $W(f)$  фрактального процесу при  $f \rightarrow \infty$  зменшується за законом  $W(f) \sim |f|^{-\beta}$ . Величину  $D_F = 2 - H = (5 - \beta) / 2$  Б. Мандельброт назвав розмірністю Фур'є даного фрактального процесу [31]. Спектральний індекс  $\beta$  *нестационарних фрактальних процесів* задовольняє умові  $1 < \beta < 3$  і в рамках моделі узагальненого броунівського руху (УБР) є пов'язаним з показником Херста співвідношенням  $\beta = 2H + 1$ . Натомість для *стаціонарних фрактальних процесів* в рамках моделі дробового гаусівського шуму (ДГШ) маємо  $-1 < \beta < 1$ ,  $\beta = 2H - 1$  і  $D_F = 2 - H = (3 - \beta) / 2$ .

14. Дільникова розмірність (divider dimension)  $D_{div}$  [86, 87, 90], відома також як *компасна розмірність (compass dimension)* [90] або *лінійкова розмірність (ruler dimension)* [86]. Вона обчислюється для кривих на площині й у просторі з використанням так званого *графіка Ричардсона* (саме робота Л. Ричардсона по оцінці довжини берегової лінії Британії [113] призвела до появи однієї з перших робіт Б. Мандельброта по фракталах [114]).

15. Площово-периметрові розмірності (area-perimeter dimensions) [90]. До них належать периметрова розмірність, площова розмірність і пейзажна розмірність. Їх прийнято обчислювати для фрагментованих зображень.

16. Розмірність вкладання  $D_A$  [37, 110, 115]. Цю розмірність було введено у нелінійній фізиці, а точніше в її розділі «Детермінований хаос і самоорганізація». Розмірність вкладання  $D_A$ , хоча й обчислюється для досліджуваного сигналу чи процесу, але її в жодному разі не можна порівнювати з іншими фрактальними розмірностями. Проблема полягає в тому, що вона описує не сам фрактальний сигнал чи процес, а аттрактор фазових траєкторій нелінійної динамічної системи, що здатна

такий сигнал породити. Розмірність вкладання обчислюють з використанням співвідношення:  $D_A = 2[d] + 3$ , де  $[ ]$  – операція обчислення цілої частини числа,  $d$  – фрактальна розмірність атрактора, що може приймати нецілі значення. Також зазначимо, що спеціалісти з детермінованого хаосу саме величину  $d$  й називають фрактальною розмірністю.

Із поміж інших існуючих фрактальних розмірностей можна також згадати *розмірність розгалуження (ramification dimension)*, що використовується для описання деревоподібних структур, *поверхневі розмірності (surface dimensions)*, що застосовують для вивчення фрактальних властивостей поверхонь у просторі, а саме, *розмірність перерізу (transect dimension)*, *контурну розмірність (contour dimension)*, *геостатистичну розмірність (geostatistical dimension)* та *висотну розмірність (elevation dimension)* [90], комплекснозначні фрактальні розмірності Сорне [116], а також *фрактонну розмірність* [117].

#### 1.4. Числові характеристики мультифракталів

На сьогодні існує декілька загально визнаних підходів до визначення числових характеристик мультифракталів. До найбільш відомих належать традиційний мультифрактальний формалізм (P-модель або термодинамічний формалізм) [110, 118], мультифрактальний формалізм Чабри та Дженсена [90], інформаційна інтерпретація мультифрактального формалізму (див., наприклад, [90]), L-модель мультифрактального формалізму (див., наприклад, [90]), а також оригінальний підхід Б. Мандельброта [48, 67]. Крім того, існують також інші моделі мультифрактального формалізму, наприклад, стохастичний опис мультифракталів [104].

Числові характеристики, що перелічено нижче, розглядатимуться саме з позицій традиційного мультифрактального формалізму.

##### 1.4.1. Узагальнена статистична сума

Нехай  $\epsilon$  фрактальний об'єкт, що займає деяку обмежену область  $\zeta$  в евклідовому просторі з розмірністю  $E$ . Лінійний розмір цієї області обмежено величиною

$L$ . На якомусь етапі його побудови він є множиною з  $N \gg 1$  точок, що є розподіленими у цій області. У граничному випадкові можна вважати, що  $N \rightarrow \infty$ . Розіб'ємо область  $\zeta$  на кубічні комірки зі стороною  $\varepsilon \ll L$  та об'ємом  $\varepsilon^E$ . Розглядатимемо лише ті комірки, де міститься хоча б одна точка, що належить даному фрактальному об'єктові. Пронумеруємо такі комірки. Нехай номер  $i$  змінюється як  $i = 1, 2, \dots, N(\varepsilon)$ , де  $N(\varepsilon)$  – сумарна кількість комірок, яка залежить від лінійного розміру комірки  $\varepsilon$ .

Нехай  $n_i(\varepsilon)$  описує кількість точок фрактального об'єкта, що міститься у комірці з номером  $i$ . Тоді величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N}$$

є ймовірністю того, що дана окрема точка перебуває саме у комірці з номером  $i$ . Величина  $p_i$  характеризує відносну заселеність комірок. З умови нормування постає, що

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1.$$

Таким чином, введено величину, що описує статистичні властивості фрактальної множини, що розглядається. Саме на її основі будується узагальнена статистична сума.

Під *узагальненою статистичною сумою* розуміють функцію:

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (1.6)$$

де  $-\infty < q < +\infty$ .

#### **1.4.2. Спектр узагальнених розмірностей. Скейлінгова експонента**

*Спектр узагальнених розмірностей*  $D_q$ , що також є відомими як *розмірності Реньї*, характеризує даний розподіл точок в області  $\zeta$  та визначається як

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad \tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}.$$

де  $\tau(q)$  – скейлінгова експонента або показник маси.

Вважається (див., наприклад, [40]), що розмірності Реньї, строго кажучи, не є фрактальними розмірностями. Саме тому їх прийнято називати узагальненими розмірностями. Скейлінгова експонента  $\tau(q)$  визначає поведінку узагальненої статистичної суми  $Z(q, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}.$$

Для монофрактала, що характеризується лише одним значенням фрактальної розмірності  $D$ , скейлінгова експонента  $\tau(q)$  є лінійною функцією:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \varepsilon^{-D(1-q)}}{\ln \varepsilon} = D(q - 1),$$

а всі узагальнені розмірності  $D_q$  виявляються однаковими:  $D_q = D$ .

Для мультифрактала, коли розподіл точок по коміркам є неоднорідним, скейлінгова експонента  $\tau(q)$  перетворюється на нелінійну функцію, а набір узагальнених розмірностей  $D_q$  у загальному випадку стає нескінченним. Функція  $D_q$  є монотонно незростаючою функцією аргумента  $q$ , має дві горизонтальні асимптоти при  $q \rightarrow \pm\infty$ , а її максимальне та мінімальне значення дорівнюють  $D_{\max} = D_{-\infty}$  і  $D_{\min} = D_{+\infty}$  відповідно. При  $q \rightarrow +\infty$  основний внесок до узагальненої статистичної суми (1.6) роблять комірки, що містять у собі найбільшу кількість точок фрактальної множини, а отже, й характеризуються найбільшою ймовірністю їх заповнення  $p_i$ . При  $q \rightarrow -\infty$  спостерігається протилежна ситуація: основну роль у (1.3) відіграють найменш заповнені комірки, що мають малі значення  $p_i$ . Таким чином, функція  $D_q$  показує, наскільки неоднорідною є множина  $\zeta$ .

За фіксованих значень  $q$  узагальнені розмірності  $D_q$  перетворюються на хаусдорфову  $D_0 = D_{HB}$ , інформаційну  $D_1 = D_I$  та кореляційну  $D_2 = D_G$  розмірності множини  $\zeta$  відповідно. Важливо, що розмірність Хаусдорфа – Безіковича  $D_{HB}$

відповідає монофракталові, який називають *носієм* (support) початкової фрактальної множини  $S$  (див., наприклад, [40]). Тому розмірність  $D_0$  прийнято називати *розмірністю носія мультифрактала*. Вона є найбільш грубою характеристикою мультифрактала. Дуже важливим є те, що саме її ми отримуємо, якщо застосуємо монофрактальний аналіз для дослідження мультифрактального об'єкту.

### 1.4.3. Функція мультифрактального спектра

Ще однією часто вживаною числовою характеристикою мультифракталів є так звана *функція мультифрактального спектра*  $f(\alpha)$ , відома також як хаусдорфов мультифрактальний спектр, спектр сингулярностей, скейлінг-спектр та  $f(\alpha)$ -спектр. Розглянемо, яким чином її отримують (див., наприклад, [104]).

Введена вище величина  $p_i$ , що характеризує відносну заселеність комірок, залежить від лінійного розміру комірки  $\varepsilon$ :  $p_i(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha_i}$ , де  $\alpha_i$  є величиною, що взагалі є різною для різних комірок  $i$ . Цю величину називають *показником сингулярності, індексом сингулярності, експонентою сингулярності, показником Ліпшиця – Гельдера* або *експонентою Гельдера*. Чим меншим є значення  $\alpha_i$ , тим більш сингулярною є міра.

Для монофрактала, де всі комірки заповнюються однаково, всі величини показника Ліпшиця – Гельдера  $\alpha_i$  стають однаковими та дорівнюють фрактальній розмірності  $D$  монофрактала:  $\alpha_i = D$ . Натомість для мультифрактала величини  $p_i$  набувають різних значень, а тому й показник Ліпшиця – Гельдера  $\alpha_i$  виявляється різним для різних комірок. Як правило, спостерігається безперервно заповнений інтервал значень  $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$ , де величини  $\alpha_{\min}$  та  $\alpha_{\max}$  визначаються мінімальною та максимальною заселеностями комірок:  $p_{\min} \approx \varepsilon^{\alpha_{\max}}$ ,  $p_{\max} \approx \varepsilon^{\alpha_{\min}}$ , а також є пов'язаними зі скейлінговою експонентою  $\tau(q)$  та спектром узагальнених розмірностей  $D_q$  співвідношеннями:

$$\left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = D_{+\infty} = \alpha_{\min}, \quad \left. \frac{d\tau}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = D_{-\infty} = \alpha_{\max}.$$

Ймовірність потрапляння величини  $\alpha_i$  до інтервалу значень  $(\alpha, \alpha + d\alpha)$  можна задати у вигляді  $n(\alpha)d\alpha$ , де для мультифрактала  $n(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}$ .

Отже, фізичний сенс функції мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  полягає у тому, що вона є хаусдорфовою розмірністю деякої однорідної фрактальної підмножини  $\zeta_\alpha$  з початкової множини  $\zeta$ , яке характеризується однаковими ймовірностями заповнення комірок  $p_i \approx \varepsilon^\alpha$ . Оскільки фрактальна розмірність підмножини завжди є меншою або рівною фрактальній розмірності початкової множини  $D_0$ , то є справедливим наступне важливе співвідношення для функції  $f(\alpha)$ :  $f(\alpha) \leq D_0$ .

Звідси постає, що набір різних значень функції  $f(\alpha)$  є спектром фрактальних розмірностей однорідних множин  $\zeta_\alpha$ , на які можна розбити початкову множину  $\zeta$ . Останній факт добре пояснює сенс терміну «мультифрактал». Отже, його можна розуміти як об'єднання різних однорідних фрактальних підмножин  $\zeta_\alpha$ , кожна з яких має власне значення фрактальної розмірності  $f(\alpha)$ .

Функція мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  є пов'язаною зі скейлінговою експонентою  $\tau(q)$  перетвореннями Лежандра. Пряме й обернене перетворення Лежандра задаються відповідно співвідношеннями:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{d\tau}{dq}, \\ f(\alpha) = q \frac{d\tau}{dq} - \tau; \end{cases} \quad \begin{cases} q = \frac{df}{d\alpha}, \\ \tau(q) = \alpha \frac{df}{d\alpha} - f. \end{cases} \quad (1.7)$$

Для монофрактала, що має фрактальну розмірність  $D$ , на площині  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  графік функції мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  вироджується у точку  $(D, D)$ .

Для мультифрактала функція  $f(\alpha)$  є всюди опуклою та має один максимум у точці  $\alpha_0$ . Значення даної функції у цьому максимумі дорівнює хаусдорфовій розмірності мультифрактала:  $f(\alpha_0) = D_0$ . Перша похідна  $f'(\alpha)$  на кінцях інтервалу  $(\alpha_{\min}, \alpha_{\max})$  перетворюється на нескінченність.

### 1.5. Моделі фрактальних сигналів

*Сигналом* називають будь-яку функцію  $s(t)$  змінної часу  $t$  (див., наприклад, [119, 120]). Якщо сигнал  $s(t)$  безпосередньо пов'язаний із деяким фізичним процесом, який його породжує, то про функцію  $s(t)$  говорять як про фізичний *процес* [8].

*Фрактальний сигнал* (ФС) – це сигнал, якась з характеристик котрого має фрактальні властивості (див., наприклад, [91, 120]). Відповідний фізичний процес, що породжує ФС, є *фрактальним процесом*.

ФС можна класифікувати, як мінімум, за трьома параметрами: 1) за показником широкосмуговості, 2) за наявністю випадкового параметра, 3) за кількістю значень фрактальних розмірностей, що потрібні для його описання.

За показником широкосмуговості  $\mu$  (див., наприклад, [8]) розрізняють широкосмугові ( $0,01 < \mu < 0,2$ ), надширокосмугові ФС ( $0,2 \leq \mu < 2$ ) та фрактальні відеосигнали ( $\mu = 2$ ).

За наявністю випадкового параметра виділяють детерміновані та стохастичні ФС. Детермінований ФС не містить у алгоритмі власної побудови жодного випадкового параметра, тоді як алгоритм створення стохастичного ФС містить принаймні один такий параметр.

Детермінований ФС  $s(t)$  має властивість масштабної інваріантності (див., наприклад, [120]):  $s(t) = a^{-H} s(at)$ , де  $a > 0$ . У математиці ці функції відомі як *однорідні функції степеня  $H$*  (див., наприклад, [120]), тому такі детерміновані ФС називають *строго однорідними* ФС [121]. Якщо ж  $a = 2^k$ , а самі сигнали мають властивість діадної самоподібності [120, 121]:  $s(t) = 2^{-k} s(2^{kH} t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то такі сигнали називають *однорідними* (або *біоднорідними*). Однорідні ФС поділяють на



енергетичні (energy-dominated) та потужносні (power-dominated) [120, 121]. Відомо [121], що для енергетичного однорідного ФС  $s(t)$  модуль його спектральної функції одновимірного перетворення Фур'є  $|\dot{S}(\omega)|$  зі збільшенням частоти  $\omega$  зменшується за законом:  $|\dot{S}(\omega)| \sim |\omega|^{-H-1}$ , де  $0 < H < 1$ ,  $H$  – показник Херста.

Важливо, що для потужносного однорідного ФС  $s(t)$  його потужносний спектр  $P(\omega)$  із збільшенням частоти  $\omega$  зменшується за степеневим законом [121]:

$$P(\omega) \sim |\omega|^{-\beta}, \quad (1.8)$$

де  $\beta = 2H + 1$ ,  $0 < H < 1$ ,  $\beta$  – спектральний індекс.

За кількістю значень фрактальної розмірності розглядають монофрактальні та мультифрактальні сигнали. Зазвичай, коли мають на увазі монофрактальний сигнал, то говорять просто про ФС, у той час як мультифрактальний сигнал (МФС) йменують повністю (див., наприклад, [33]). Найбільш відомі моделі детермінованих і стохастичних ФС і МФС зібрані, зокрема, у роботі [33].

Слід зазначити, що добре відомий простий зв'язок  $D = 2 - H$  між фрактальною розмірністю  $D$  і показником Херста  $H$ , строго кажучи, є справедливим тільки у межах моделей УБР і ДГШ, а також їх модифікацій. Ще в 1982 р. в [32] Б. Мандельброт вказував, що в загальному випадку для ФС величини  $D$  ( $1 < D < 2$ ) і  $H$  ( $0 < H < 1$ ) є незалежними, оскільки перша з них характеризує локальну поведінку сигналу, а друга – глобальну, зокрема, наявність довготермінової залежності.

Моделі ФС, для яких є справедливим вказаний зв'язок, є однопараметричними. Натомість, існують і більш складні моделі ФС, зокрема, двопараметричні, де це не так. До них належать, наприклад, модель узагальненого процесу Коші (див., наприклад, [122]), модель альфа-стабільних процесів (див., наприклад, [122]), модель узагальнених процесів Орнштейна–Уленбека (див., наприклад, [122]) і т. і. Далі в роботі використовуються лише однопараметричні моделі.

## 1.6. Методи фрактального аналізу

Найпростіший варіант фрактального аналізу полягає в оцінюванні однієї (значно рідше – декількох) фрактальних розмірностей із переліку тих, що наведено у пункті 1.3.2 (див., наприклад, [55]). Однак на сьогодні такий підхід вже є застарілим, оскільки обчислення згаданих фрактальних розмірностей саме для сигналів з тих чи інших причин виявляється досить незручним.

На теперішній час існує багато спеціальних методів фрактального (а точніше, монофрактального) аналізу, розроблених фахівцями з абсолютно різних напрямків науки та техніки саме для аналізу сигналів і процесів. Скоріш за все, найбільш повний набір методів фрактального аналізу зібрано в оглядовій роботі [96].

Отже, до методів фрактального аналізу належать: метод розмірності Фур'є (див., наприклад, [66, 90]), відомий також як метод спектра потужності (див., наприклад, [90, 123]); метод періодограм Ломба (див., наприклад, [124]); метод CGSA (coarse graining spectral analysis) (див., наприклад, [123]); клітковий метод, відомий також як звичайний клітковий метод (ordinary box-counting) (див., наприклад, [32, 55, 123, 125]); метод дійсних кліток (real box-counting method) (див., наприклад, [126]); диференціальний клітковий метод (див., наприклад, [127]); розширений клітковий метод (extended counting method) (див., наприклад, [125]); клітковий метод з мультирозрізненням (multiresolution box-counting method) (див., наприклад, [128]); метод Холла та Вуда (див., наприклад, [129]); метод сосисок Мінковського (див., наприклад, [130]); варіаційний метод (див., наприклад, [126]), відомий також як варіаційний клітковий метод (див., наприклад, [131]); метод Берлаги та Клейна (див., наприклад, [132, 133]); метод Хігучі (див., наприклад, [55, 128, 134]); метод Катца (див., наприклад, [128, 134]); метод Петросяна (див., наприклад, [134, 135]); метод Мандельброта (див., наприклад, [128]); метод довжини з мультирозрізненням (див., наприклад, [128]); метод Шевчика (див., наприклад, [136]); метод послідовних різностей (див., наприклад, [137]); метод нормалізованої густини довжини (див., наприклад, [138]); метод критичної експоненти (див., наприклад, [139]); метод нормованої середньої автокореляції (див., наприклад, [140]); метод Марагоса – Сана (див., наприклад, [141]); метод узагальнених розмірностей Реньї (див., наприклад,

[142]); метод варіаційної розмірності (див., наприклад, [143]); метод Ліу – Чіу (див., наприклад, [144]); метод перетинань нуля (див., наприклад, [145]); метод Корчака (див., наприклад, [90, 145]); метод Ченів (див., наприклад, [146]); метод нормованого розмаху (див., наприклад, [62, 90, 131]); метод подібних фігур (див., наприклад, [147]); метод Мандельброта й Уолліса (див., наприклад, [148]), що інколи називають методом нормованого розмаху з перемасштабованим діапазоном (rescaled-range R/S analysis) [149]; метод автокореляційного аналізу (див., наприклад, [90, 123]); метод DFA (detrended fluctuation analysis) (див., наприклад, [66, 90, 123, 149, 150]); метод AFA (adaptive fractal analysis) (див., наприклад, [131]); метод DMA (detrended moving average) (див., наприклад, [151]) та його модифікації [150]; метод другого моменту (див., наприклад, [149]); метод Пельтьє – Леві-Вехела (див., наприклад, [149]); метод дисперсійного графіка (variance plot method) (див., наприклад, [152]); метод варіограми (variogram method) (див., наприклад, [129, 152]), який інколи також називають методом напівваріограми (semivariogram method) (див., наприклад, [90]); узагальнений метод варіограми (див., наприклад, [129]); метод агрегованої дисперсії (див., наприклад, [153]); метод абсолютних величин агрегованого сигналу (див., наприклад, [153]); метод періодограми (див., наприклад, [55, 129, 153]); метод, що ґрунтується на вейвлет-аналізі (див., наприклад, [90]); метод, що ґрунтується на розкладанні за емпіричними модами (див., наприклад, [154]), та його модифікації [155]; метод дисперсійного аналізу (див., наприклад, [90, 123]), відомий також як метод SDA (standard deviation analysis) (див., наприклад, [156]); метод SWV (scaled windowed variance method) (див., наприклад, [90]); метод перетворення суми сигналу, відомий також як метод SSC (signal summation conversion method) (див., наприклад, [90]); метод регуляризаційної розмірності (див., наприклад, [154]); метод DEA (diffusion entropy analysis) (див., наприклад, [156]) і т. і.

Слід окремо зазначити, що на точність оцінювання фрактальної розмірності досліджуваного сигналу будь-яким з вище перелічених методів негативно впливає цілий комплекс факторів. Найважливішими серед них є кількість дискретних відлі-

ків сигнала, наявність у структурі сигнала повільно змінюючогося або гармонічного тренда, а також наявність адитивних або мультиплікативних шумів (див., наприклад, [134]).

Останніми роками також з'явилася ціла низка методів, що перебувають на межі фрактального та кореляційного аналізів. До них належать, зокрема, метод MF-X-PF (multifractal cross-correlation analysis based on the partition function approach), метод MF-SMXA (multifractal statistical moment crosscorrelation analysis), метод MF-NXA (multifractal height cross-correlation analysis), метод MF-X-DFA (detrended fluctuation analysis extended into multifractal detrended cross-correlation analysis), метод MF-DMA (multifractal detrending moving-average analysis), метод MF-X-DMA (detrending moving-average analysis extended into cross multifractal formulism), метод MFCCA (multifractal cross-correlation analysis), метод MFDPXA (multi-fractal detrended partial correlation analysis) і т. і. (див., наприклад, [96]).

Також необхідно згадати про появу комплексних методів фрактального аналізу, що забезпечують обробку й аналіз великої кількості числових характеристик та використовують декілька простих методів в єдиному комплексі [96].

### 1.7. Методи мультифрактального аналізу

До найбільш відомих і часто вживаних методів мультифрактального аналізу [96] сигналів і процесів належать метод максимумів модуля вейвлет-перетворення (wavelet transform modulus maxima – WTMM) (див., наприклад, [61, 105]); метод вейвлет-коефіцієнтів (див., наприклад, [157]); метод вейвлет-лідерів (див., наприклад, [157]); метод MF DFA (multi-fractal DFA) (див., наприклад, [158]); метод узагальненого показника Херста (див., наприклад, [159]); метод виявлення мультифрактального режиму (див., наприклад, [160]); метод зваженого узагальненого показника Херста (див., наприклад, [161]); локальний метод другого моменту (див., наприклад, [145]); модифікований метод Марагоса – Сана (див., наприклад, [141]); метод, що ґрунтується на нелінійних перетвореннях класу Коена (див., наприклад, [162]); метод MF DEA (multi-fractal DEA) (див., наприклад, [163]); метод мультифрактального спектра з великими відхиленнями (large deviation multifractal spectrum

method) (див., наприклад, [55]); метод кумулятивної маси (cumulative mass method), відомий також як метод «пісочниці» (“sandbox” method) [164]; метод MF DMA (multi-fractal DMA) [165] і т. і.

Також існують методи, що знаходяться на межі мультифрактального аналізу з іншими напрямками в обробці сигналів і процесів. Такими, наприклад, є метод DCCA (detrended cross-correlation analysis) і метод MF DXA (multi-fractal detrended cross-correlation analysis) (див., наприклад, [166]).

### 1.8. Нерозв’язані задачі

Незважаючи на наявність великої кількості простих і комбінованих методів фрактального і мультифрактального аналізів, більшість з яких перелічено вище, для успішного застосування їх при розв’язанні практичних задач, зокрема, в методах дистанційного радіозондування геокосмосу зроблено, на жаль, недостатньо. На нашу думку, зокрема, є доцільним привернути увагу до таких нерозв’язаних задач, сутність яких полягає у наступному.

1. Добре відомо, що існує певна залежність оцінюваної фрактальної розмірності  $D$  аналізованого ФС  $s(t)$  від довжини відрізка  $t \in [a, b]$ , на якому вона оцінюється. Теоретично для стаціонарного монофрактального сигналу це принципово неважливо. Але на практиці переважна більшість аналізованих сигналів є нестационарною, тобто залишаючись майже монофрактальними на деякому масштабі, вони змінюють свої фрактальні властивості із часом. Більш того, часто дослідника цікавлять зміни, які пов’язані із виявленими ним часо-частотними структурами, що мають певні часові масштаби. Тому доцільно було б створити спеціальний комплексний метод фрактального аналізу, який дозволяв би враховувати наявність таких структур та їх параметри під час оцінювання фрактальної розмірності.

2. Проводячи аналіз того чи іншого сигналу або процесу, дослідник заздалегідь може принципово не мати жодної інформації про те, яку саме модель (однопараметричну, наприклад, УБР чи ДГШ, або двопараметричну, наприклад, польоту Леві або процесу Орнштейна – Уленбека) доцільно використовувати. У переважній більшості випадків обмежуються тільки моделлю УБР (значно рідше додають і

ДГШ). Але як зазначалося вище, фрактальна розмірність  $D$  і показник Херста  $H$  можуть виявитись цілком незалежними один від одного параметрами, а тому використання вірної лише для однопараметричних моделей ФС формули  $D = 2 - H$ , нажаль, може ввести дослідника в оману. Саме тому потрібно створити комплексний метод аналізу сигналів і процесів, який зміг би поєднати не тільки оцінки фрактальних параметрів, зроблені, бажано, незалежними методами, а й згрупувати їх за ознаками точковості, локальності та глобальності відносно самого досліджуваного сигналу.

3. Як показує проведене ретельне дослідження понад п'ятидесяти існуючих методів монофрактального аналізу сигналів і процесів, всі оцінки різних фрактальних розмірностей мають одну спільну ваду: залежність між істинною розмірністю та отримуваною її оцінкою фактично завжди є нелінійною. Більш того, на практиці майже ніхто не враховує цього, а тому результуючі оцінки часто, м'яко кажучи, є не занадто вірними. Під час аналізу істотно нестационарних (у сенсі фрактальних властивостей) сигналів подібні «нелінійні спотворення» результату можуть, у кінцевому рахунку, призвести до суттєвих помилок у висновках щодо фізичної сутності процесів та явищ, які досліджуються. Саме тому необхідно створити метод, який буде здатний виправити такий недолік.

4. Навіть у найкращих оглядових роботах, присвячених методам фрактального та мультифрактального аналізів (див., наприклад, [125, 167]), наведено дуже мало результатів аналізу модельних сигналів, які дали б можливість дослідникові набути досвід, необхідний для аналізу реальних сигналів і процесів. Тому виглядає доцільним проведення ґрунтовного фрактального аналізу модельних ФС з використанням створених нових комплексних методів задля кращого розуміння їх переваг і недоліків. Результатом цього аналізу має бути створення деякого алгоритму аналізу експериментальних даних, що буде застосований в даній роботі та який можна рекомендувати до використання іншим дослідникам.

5. Аналогічний новий алгоритм, що базується на аналізі модельних МФС, має бути створений і для проведення мультифрактального аналізу.

6. Створені нові алгоритми фрактального та мультифрактального аналізів мають бути застосовані для дослідження реальних експериментальних даних у задачах дистанційного радіозондування геокосмосу, оскільки лише успішне їх використання може підтвердити корисність та ефективність цих алгоритмів.

7. Ще одна важлива досі нерозв'язана задача полягає у дослідженні спотворень надширококутних сигналів, що виникають під час їх поширення у диспергуючих середовищах. Результати її розв'язання є важливими не тільки для використання ФС, наприклад, у радіолокації або телекомунікаціях для оцінки якісних показників відповідної радіотехнічної системи, а й при аналізі сигналів і процесів, зокрема, в задачах фізики та радіофізики геокосмосу для розуміння того, чи виявлені фрактальні властивості притаманні саме їх джерелу, а не є результатом спотворень, що виникли під час поширення аналізованого ФНШС сигналу у навколишньому середовищі.

### **1.9. Висновки до першого розділу**

1. Фрактальна парадигма, підвалини якої закладено Б. Мандельбротом, стверджує, що фрактальність є однією з фундаментальних властивостей навколишнього світу.

2. Існують математичні та фізичні фрактали. Їх прийнято характеризувати числовими характеристиками, основними з яких є фрактальні розмірності. Методи обчислення фрактальних розмірностей є різними для математичних і фізичних фракталів.

3. Одним з видів фізичних фракталів є фрактальні сигнали і процеси. Здебільшого їх фрактальні властивості проявляються у статистичному сенсі. Створено низку моделей детермінованих і стохастичних ФС і МФС.

4. Існує великий вибір різноманітних методів фрактального та мультифрактального аналізів сигналів і процесів.

5. Нелінійна та системна парадигма стверджують, що процеси у складних, відкритих, нелінійних, динамічних системах, викликані дією потужного, нестационарного джерела енерговиділення, можуть бути віднесені до короткотермінових,

нелінійних, НШС і фрактальних. Геокосмос є однією зі згаданих систем, процеси в ньому часто мають фрактальні властивості, а тому для успішного отримання інформації про них просто необхідно використовувати методи фрактального та мультифрактального аналізу.

### **1.10. Постановка задач дослідження**

Метою даної дисертаційної роботи є підвищення інформативності методів дистанційного радіозондування (ДР) під час розв'язання задач фізики та радіофізики геокосмосу за рахунок використання методів фрактального та мультифрактального аналізу. Задля її успішного досягнення слід розв'язати наступні задачі.

1. Розробка нового комплексного методу фрактального аналізу, який забезпечує різнобічну характеристику досліджуваного сигналу або процесу на базі одночасного та порівняльного вивчення комплексу фрактальних параметрів, отриманих низкою незалежних методів.

2. Створення спеціального комплексного методу фрактального аналізу, який дозволяє враховувати наявність в аналізованому ФС часо-частотних структур і використовувати їх параметри під час оцінювання фрактальної розмірності.

3. Покращення якості оцінювання фрактальних розмірностей у методах монофрактального аналізу сигналів і процесів.

4. Отримання нової інформації про фрактальні властивості сигналів і процесів в задачах дистанційного радіозондування геокосмосу з використанням запропонованих алгоритмів фрактального та мультифрактального аналізу.

5. Оцінка дисперсійних спотворень модельних ФНШС сигналів, що виникають під час їх поширення у геокосмосі.

Розв'язанню цих задач і присвячена дана дисертаційна робота.



## РОЗДІЛ 2. ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ СИГНАЛІВ

Незважаючи на наявність досить великої кількості методів монофрактального аналізу, про що свідчить аналітичний матеріал, викладений в підрозділі 1.6, здійснення ефективних досліджень фрактальних властивостей реальних сигналів і процесів потребує створення нових та істотної модифікації вже існуючих методів. Саме цьому й присвячено даний розділ дисертаційної роботи.

Результати, отримані автором у цьому розділі, висвітлено в роботах [10 – 13, 21 – 23, 28, 29].

### 2.1. Метод узагальненого фрактального аналізу

#### *2.1.1. Основна ідея метода*

Узагальнений фрактальний аналіз (УФА) (Generalized Fractal Analysis – GFA) як новий комплексний метод монофрактального аналізу було запропоновано у 2018 р. Л. Ф. Черногором, О. В. Лазоренком і А. А. Онищенком у роботі [16].

Основна ідея даного комплексного метода монофрактального аналізу сигналів і процесів полягає у тому, щоб отримати достатню кількість інформації про їх фрактальну структуру та характер її змінень у часі шляхом вивчення цілого набору числових характеристик та їх порівняння між собою.

Треба особливо зазначити, що УФА – це метод саме монофрактального аналізу, оскільки заздалегідь вважається, що досліджуваний сигнал або процес є монофрактальним (або майже монофрактальним) у певному діапазоні масштабів і на певному проміжку часу, хоча на всій області існування він може мати й мультифрактальні властивості.

Множину числових характеристик, що використовуються в УФА, розподілено на три різні групи.

Перша з цих груп (прямі характеристики) пов'язана з характеристиками, що обчислюються безпосередньо з часової реалізації досліджуваного сигналу. Вона містить у собі ємнісну, регуляризаційну та поточкову розмірності, розмірності, які базуються на показниках Херста та Гельдера, а також розмірність Фур'є.

Друга група (спектральні характеристики) об'єднує характеристики, які описують фрактальні властивості фур'є- та вейвлет-спектрів аналізованого сигналу або процесу. Додатковою перевагою є можливість використання не тільки різних вейвлетів, а й різних вейвлет-перетворень.

Третя група (характеристики фазового простору) пов'язана з фрактальними властивостями «дивного» аттрактора хаотичної нелінійної системи, яка є здатною породити досліджуваний сигнал або процес.

На нашу думку, такий комплексний підхід дозволяє всебічно описати фрактальні характеристики досліджуваного сигналу або процесу. Більш того, набір числових характеристик, що використовується в УФА, в майбутньому може бути доповнений або змінений.

Тепер перейдемо безпосередньо до розгляду кожної з трьох груп фрактальних характеристик, що застосовуються в УФА.

### ***2.1.2. Прямі характеристики***

Стисло розглянемо фрактальні розмірності, що у межах УФА обчислюються безпосередньо для часової реалізації досліджуваного сигналу.

1. Ємнісна розмірність. На теперішній час існує велика кількість різноманітних методів оцінювання ємнісної розмірності. Одним із найефективніших є варіаційний метод (див., наприклад, [126]). Його ідея полягає у наступному.

Варіаційний метод використовує геометричний підхід до оцінювання фрактальної розмірності. У межах цього методу будь-який лінійний відрізок графіку функції  $G_f$ , що має довжину  $L$ , покривається з використанням так званого HSEM  $\varepsilon$ -покриття (рис. 2.1). Аббревіатура HSEM є скороченням від «Horizontal Structuring Element Method» – «Метод Горизонтальних Структуруючих Елементів». При покриванні лінійного відрізка з довжиною  $L$  площа HSEM  $\varepsilon$ -покриття дорівнює площі

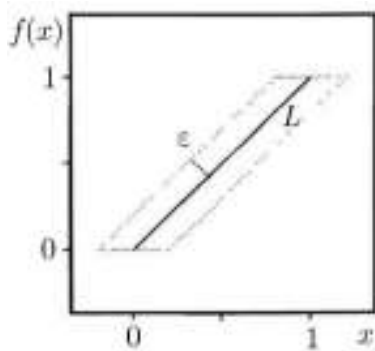


Рисунок 2.1 – Покривання лінійного відрізка графіку функції  $G_f$ , що має довжину  $L$ , з використанням HSEM  $\varepsilon$ -покриття.

паралелограма з висотою  $2\varepsilon$  та стороною  $L$  та складає  $\lambda_2(G_f(\varepsilon)) = 2L\varepsilon$ . У той же час відомо, що ємнісна розмірність  $D_C$  графіка функції  $G_f$  може бути визначена як

$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(\lambda_2(G_f(\varepsilon)) / \varepsilon^2)}{\log(1 / \varepsilon)}. \quad (2.1)$$

Зважаючи на те, що для фізичного фракталу неможливо забезпечити вимогу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , на практиці використовується не сама формула (2.1), а ефективний алгоритм, запропонований у роботі [126]. Його суть полягає у наступному [126].

Нехай  $f^*(x, \varepsilon) = \max\{f(y) \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$  і  $f_*(x, \varepsilon) = \min\{f(y) \mid |y - x| \leq \varepsilon\}$ .

Тоді повна  $\varepsilon$ -варіація функції  $f(x)$  на області  $I$  визначається співвідношенням:

$$V_f(\varepsilon) = \int_I (f^*(x, \varepsilon) - f_*(x, \varepsilon)) dx. \quad (2.2)$$

Встановлено, що  $V_f(\varepsilon) = \lambda_2(G_f(\varepsilon))$ , а тому пряме обчислення  $\lambda_2(G_f(\varepsilon))$  можна замінити на обчислення інтеграла (2.2).

Припустимо, що функцію  $f(x)$  вже обчислено в  $N + 1$  еквідистантних точках  $x_j = j / N$ ,  $j = \overline{0, N}$ . Оберемо дві величини: цілочислову  $R < N$  та дійсну  $\varepsilon_j = k_j / R$ , де  $k_j \in \mathbb{N}$  і  $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_m$ . Величина  $R$  визначає роздільну здатність, з якою буде оцінюватися повна варіація. Слід зазначити, що її не реко-

мендують обирати занадто близькою до  $N$ , щоб уникнути можливих проблем з розділенням окремих компонент. Далі для кожної смуги  $\varepsilon_j$  визначаються максимальне та мінімальне значення функції  $f(x)$  на кожному інтервалі  $x \in [k/R - \varepsilon_j, k/R + \varepsilon_j]$ , де  $k = \overline{0, R}$ . Отримані величини позначимо як  $\hat{f}^*(k/R, \varepsilon_j)$  і  $\hat{f}_*(k/R, \varepsilon_j)$ . Тоді повна  $\varepsilon_j$ -варіація функції  $f(x)$  задається співвідношенням:

$$\hat{V}_f(\varepsilon_j) = \frac{1}{R+1} \sum_{k=0}^R \left( \hat{f}^*(k/R, \varepsilon_j) - \hat{f}_*(k/R, \varepsilon_j) \right).$$

Тепер оцінку ємнісної розмірності  $D_C$  можна отримати як кутовий коефіцієнт апроксимуючої прямої, побудованої методом найменших квадратів (МНК) на графіку залежності  $\log(\hat{V}_f(\varepsilon_j) / \varepsilon_j^2)$  від  $\log(1 / \varepsilon_j)$  для  $j = \overline{1, m}$ .

Добре відомо (див., наприклад, [34, 48]), що коли  $\varepsilon$  дискретний вектор даних  $P_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , який треба апроксимувати функцією  $\hat{P}_k = c|k|^{-\beta}$ , то в подвійних логарифмічних координатах остання перетворюється на лінійну:

$$\log \hat{P}_k = C - \beta \log k, \quad C = \ln c.$$

МНК дозволяє отримати величини  $\beta$  і  $C$  у вигляді

$$\beta = \frac{\sum_{k=1}^n \log k \sum_{k=1}^n \log P_k - n \sum_{k=1}^n (\log P_k) \ln k}{n \sum_{k=1}^n (\log k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log k \right)^2}, \quad (2.3)$$

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n (\log k)^2 \sum_{k=1}^n \log P_k - \sum_{k=1}^n \log k \sum_{k=1}^n (\log P_k) \log k}{n \sum_{k=1}^n (\log k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log k \right)^2}. \quad (2.4)$$

відповідно. У якості основи логарифма зазвичай обирають двійку або експоненту.

Похибка визначення величини  $\beta$  (див., наприклад, [145]) складає:

$$\sigma_{\beta}^2 = \frac{\frac{n}{n-2} \sum_{k=1}^n (\log P_k - (C - \beta \log k))^2}{n \sum_{k=1}^n (\log k)^2 - \left( \sum_{k=1}^n \log k \right)^2}. \quad (2.5)$$

Проста модифікація співвідношень (2.3) – (2.5) для залежності  $\log(\hat{V}_f(\varepsilon_j) / \varepsilon_j^2)$  від  $\log(1 / \varepsilon_j)$  дозволяє отримати оцінку ємнісної розмірності  $D_C$  та її похибку  $\sigma_D$ .

Тут слід зробити зауваження щодо трактовки результатів подібних оцінок. Добре відомо (див., наприклад, [82]), що сигнал має фрактальні (а точніше, монофрактальні) властивості на тому діапазоні масштабів, де експериментальні точки графіку у подвійних логарифмічних координатах добре укладаються на пряму. Там, де це не так, класифікувати властивості досліджуваного сигналу як фрактальні буде невірним. Але на практиці для фізичного фракталу лінійна залежність завжди існує тільки в обмеженому діапазоні масштабів. Більш того, може трапитися, що таких лінійних відрізків буде декілька. Тоді маємо справу з мультифракталом.

Таким чином, надаючи оцінку фрактальної розмірності  $D$ , завжди слід указувати, для якого саме діапазону масштабів її отримано. Саме це й враховувалося авторами під час розробки метода УФА.

Якщо обчислювати ємнісну розмірність не для всього сигналу, а тільки у прямокутному вікні  $w(t)$  шириною  $T$  в часовій області, то така ємнісна розмірність стає функцією часу:  $D_C = D_C(t)$ . Значення розмірності, отримане за фіксованого положення вікна, зазвичай прив'язують до положення на часовій осі середини вікна  $w(t)$ . Між тим, у загальному випадку існує також залежність ємнісної розмірності від ширини  $T$  самого вікна  $w(t)$ , тобто  $D_C = D_C(T, t)$ . Для монофрактального сигналу такої залежності немає, але на практиці досліджувані сигнали майже завжди мають більш складні (мультифрактальні) властивості. Тому дослідження функції  $D_C = D_C(T, t)$  на часо-часовій площині  $(T, t)$  виглядає доцільним і корисним.

Зауважимо, що в 2010 р. в роботі [128] часову залежність будь-якої фрактальної розмірності  $D = D(t)$  названо «фрактограмою».

2. Регуляризаційна розмірність. Метод регуляризаційної розмірності запропоновано в 1998 р. F. Roeff і J. Levi Vehe в роботі [168]. Його основна ідея полягає у наступному (див., наприклад, [154]).

Нехай  $\Gamma$  – графік сигналу  $s(t)$ , що є визначеним на інтервалі  $K \subset \mathbb{R}$  та є обмеженим там. Розглянемо  $s_a(t)$  як проекцію  $s(t)$  на простір апроксимації з меншою роздільною здатністю  $a > 0$  так, що  $\lim_{a \rightarrow 0} s_a = s$ , та визначимо:

$$L(a) = \int_K \sqrt{1 + s'_a(t)^2} dt.$$

Як скінченну довжину відповідного апроксимуючого графіка  $\Gamma_a$ . Тоді регуляризаційна розмірність графіка  $\Gamma$  задається співвідношенням:

$$D_R = 1 + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\log L(a)}{\log a}.$$

На практиці регуляризаційну розмірність можна оцінити, обчислюючи довжину графіка  $L(a)$ , як мінімум, трьома різними способами: з використанням гаусівського вікна, дискретного вейвлет-перетворення (ДВП) (див., наприклад, [105]) та метода розкладання сигналу за емпіричними модами (EMD) (див., наприклад, [154]). Розглянемо їх докладніше.

Для реалізації першого способу береться гауссівське вікно  $G(t)$ , на його основі будується ядро  $G_a(t) = |a|^{-1} G(t/a)$ , після чого довжина графіка обчислюється із співвідношення:

$$L(a) = \int_K \sqrt{1 + \left| \frac{d}{dt} (s \otimes G_a)(t) \right|^2} dt,$$

де  $\otimes$  – операція простої інтегральної згортки двох функцій.

Другий спосіб пов'язано з використанням ДВП, при цьому довжина графіка  $L(a_j)$  на масштабі  $a_j = 2^j$  ( $j = \overline{1, J}$ ,  $J$  – кількість рівнів розкладання) дорівнює:

$$L(a_j) = \int_K \sqrt{1 + \left| \frac{d}{dt} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle s, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}(t) \right|^2} dt,$$

де  $\langle \rangle$  – операція обчислення скалярного добутку,  $\phi_{j,k}(t)$  – «батьківський» вейвлет.

Третій спосіб побудовано на застосуванні EMD, коли довжина графіка задається співвідношенням:

$$L(a_k) = \int_K \sqrt{1 + \left| \frac{d}{dt} \sum_{i=k}^M C_i(t) \right|^2} dt, \quad k = \overline{1, M},$$

де

$$s(t) = R(t) + \sum_{i=1}^M C_i(t)$$

– розкладання сигналу  $s(t)$  в методі EMD за емпіричними модами.

Регуляризаційна розмірність  $D_R$  обчислюється як для всього сигналу в цілому, так і в ковзаючому вікні з шириною  $T$ . В останньому випадку вона стає функцією положення вікна  $t$  та його ширини  $T$ , тобто  $D_R = D_R(T, t)$ .

3. Поточкова розмірність. Поточкова розмірність  $D_P$  сигналу  $s(t)$ , яку розглянуто в пункті 1.3.2, обчислюється в достатньо малій околі заданої точки  $t$  з використанням формули (1.4), а тому вона є функцією часу, тобто  $D_P = D_P(t)$ .

4. Усереднена поточкова розмірність. Значення поточної розмірності  $D_P(t)$  можна усереднити (формула (1.5)) у певному вікні шириною  $T$ , положення середини якого дорівнює  $t$ . У результаті отримуємо функцію  $D_{PA}(T, t)$ . Це й є усереднена поточкова розмірність сигналу  $s(t)$ .

5. Херстова розмірність. Значення фрактальної розмірності, що базується на показникові Херста  $H$  та для зручності далі йменується херстовою розмірністю  $D_H$ , обчислюються у рамках моделі УБР, де є справедливим співвідношення  $D_H = 2 - H$ . Не зважаючи на те, що на нинішній час існує ціла низка різних методів оцінки показника Херста  $H$ , у рамках УФА ми використовуємо найстаріший

метод – метод нормованого розмаху, який був рекомендований ще Б. Мандельбротом [32]. Такий вибір пояснюється тим, що метод нормованого розмаху, який є статистичним за своєю ідеєю, показує якісні результати для досить довгих реалізацій сигналів. Це нас цілком влаштовує, оскільки показник Херста  $H$  за своєю природою характеризує саме наявність довготермінових залежностей. Натомість для дослідження коротких реалізацій і локальних особливостей сигналу у складі метода УФА є інші інструменти, зокрема, поточкова  $D_P$  та усереднена поточкова  $D_{PA}$  розмірності. Херстова розмірність  $D_H$  обчислюється як для сигналу в цілому, так і в ковзаючому вікні шириною  $T$ , положення середини якого дорівнює  $t$ , приводячи до появи функції  $D_H = D_H(T, t)$ .

6. Гельдерова розмірність. Показник Ліпшиця – Гельдера  $\alpha$ , про який вже згадувалося в пунктах 1.3.2 і 1.4.2 та який описує гладкість графіка функції  $s(t)$ , можна обчислити в дуже малій околі кожної точки цього сигналу та записати у вигляді функції  $H_l(t)$ . Таке позначення має певний сенс, оскільки на фізичному рівні строгості можна вважати, що саме на цю функцію перетворюється обчислений у ковзаючому вікні показник Херста  $H(T, t)$  при  $T \rightarrow 0$ . Тоді відповідна фрактальна розмірність  $D_{LG}(t) = 2 - H_l(t)$ , яку для простоти далі називатимемо Гельдеровою розмірністю, буде точковою характеристикою сигналу  $s(t)$ . Як і у випадку поточної розмірності  $D_P(t)$ , де отримуються усереднену поточкову розмірність  $D_{PA}(T, t)$ , для Гельдерової розмірності  $D_{LG}(t)$  також можна обчислити її усереднений у ковзаючому вікні варіант  $D_{LGA}(T, t)$ . Обчислення функції  $H_l(t)$  в методі УФА здійснюються з використанням метода WTMM, що згадується у підрозділі 1.7 та розглядається у пункті 3.1.1.

7. Розмірність Фур'є. Розмірність Фур'є  $D_F$ , яка розглядалася у пункті 1.3.2, є ще одним добре відомим та ефективним методом оцінювання фрактальної розмірності. Її оцінюємо як для всього сигналу, так і у ковзаючому вікні шириною  $T$ , отримуючи функцію  $D_F(T, t)$ .



Важливо зазначити, що на думку авторів, саме розглянутий вище набір фрактальних розмірностей дозволяє досить повно охарактеризувати аналізований фрактальний сигнал або процес. У першу чергу, це пов'язано з тим, що для обчислення фрактальних розмірностей використовуються найрізноманітніші підходи, що ґрунтуються на сучасних методах аналізу сигналів і процесів (від класичних метода нормованого розмаху та метода одновимірного перетворення Фур'є (ОПФ), до вейвлет-аналізу і метода розкладання по емпіричних модах).

Також необхідно додати декілька пояснень про локалізаційні властивості фрактальних розмірностей, що застосовуються у методі УФА. Обчислення розглянутих вище прямих характеристик відбувається з використанням віконних функцій у часовій області. Саме тому результати, що отримуються під час цього, мають три різні види часової локалізації, які будемо називати глобальною, локальною та точковою. Доцільність введення локалізаційних властивостей фрактальних розмірностей пояснюється наступними міркуваннями.

Розмірність  $D$  всього досліджуваного сигналу йменуватимемо глобальною, оскільки вона характеризує увесь сигнал у цілому, тобто глобально. У той самий час розмірність, що обчислюється у певному ковзаючому вікні, яке має скінченну ширину  $T$ , і стає функцією часу  $D(T, t)$ , можна назвати локальною. Тоді розмірність  $D(t)$ , що має відношення до однієї окремої точки досліджуваного сигналу (та її дуже малої околи) може вважатися точковою.

Локалізаційні властивості фрактальних розмірностей, що використовуються в УФА, наведено в табл. 2.1. Цілком доцільним виглядає порівняння між собою фрактальних розмірностей з однаковою локалізацією.

### ***2.1.3. Спектральні характеристики***

Між сигналом  $s(t)$  як функцією-оригіналом та його функцією-зображенням у сенсі інтегрального перетворення, без сумнівів, існує тісний зв'язок. Тому для ФС і МФС їх спектральні характеристики тією чи іншою мірою теж можуть проявляти фрактальні властивості. Тому виглядає доцільним обчислювати фрактальні розмірності й для таких спектральних характеристик.

Таблиця 2.1. Локалізаційні властивості фрактальних розмірностей, що використовуються в УФА

Фрактальна розмірність	Локалізація		
	Глобальна	Локальна	Точкова
Ємнісна $D_C$	+	+	–
Регуляризаційна $D_R$	+	+	–
Поточкова $D_P$	–	–	+
Усереднена поточкова $D_{PA}$	+	+	–
Херстова $D_H$	+	+	–
Гельдерова $D_{LG}$	–	–	+
Усереднена Гельдерова $D_{LGA}$	+	+	–
Фур'є $D_F$	+	+	–

В якості таких спектральних характеристик використовуються спектральна функція (СФ) ОПФ сигналу та скелетон безперервного вейвлет-перетворення (БВП).

1. Фрактальні характеристики СФ ОПФ. Добре відомо (див., наприклад, [121]), що СФ ОПФ сигналу  $s(t)$  визначається за допомоги прямого ОПФ:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (2.6)$$

Оскільки функція  $\dot{S}(\omega)$  є комплекснозначною, вважається доцільним розглядати чотири дійсні функції, а саме,  $\text{Re } \dot{S}(\omega)$ ,  $\text{Im } \dot{S}(\omega)$ ,  $|\dot{S}(\omega)|$  та  $\arg \dot{S}(\omega)$ .

Для кожної з цих функцій будується відповідний графік, який розглядається як зображення. Фрактальна розмірність для кожної функції оцінюється як ємнісна розмірність такого зображення. Здійснюється це з використанням клітинного методу для зображень (див., наприклад, [105]).

2. Фрактальні характеристики скелетона БВП. СФ БВП сигналу  $s(t)$  задається співвідношенням (див., наприклад, [105]):

$$Wf(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (2.7)$$

$$a > 0, \quad -\infty < b < +\infty,$$

де  $\psi(t)$  – вейвлетвирна функція, відома також як материнський вейвлет або просто вейвлет,  $a$  – параметр масштабування,  $b$  – параметр зсуву.

Для функції  $|Wf(a,b)|$  можна відшукувати точки локальних максимумів, що поєднуються у ланцюжки. Такі ланцюжки називають хребтами даної функції. Множина всіх існуючих хребтів є скелетоном БВП сигналу  $s(t)$  (див., наприклад, [105]).

Як зображення скелетон може мати фрактальні властивості. Тому для нього можна обчислювати відповідні фрактальні характеристики. Такими у методі УФА є ємнісна розмірність  $D_C$ , що оцінюється клітинним методом для зображень (див., наприклад, [105]), регуляризаційна розмірність  $D_R$  та лакунарність  $L$  (див., наприклад, [89]). Вони обчислюються як для всього сигналу в цілому, так і для ковзаючого вікна у часовій області, що має ширину  $T$ . У результаті останнього отримуємо наступний набір характеристик:  $D_C(T,t)$ ,  $D_R(T,t)$  і  $L(T,t)$ .

#### **2.1.4. Характеристики фазового простору**

Із точки зору хаотичної динаміки (див., наприклад, [37]) кожному конкретному сигналові можна поставити у відповідність деяку нелінійну хаотичну систему, що здатна створити цей сигнал. Якщо такий сигнал є фрактальним, атрактор системи у фазовому просторі виявляється «дивним», що також має фрактальну структуру. Отже, фрактальна розмірність такого атрактора  $D_A$  може розглядатись як фрактальна характеристика самого сигналу. Її можна обчислювати як для всього сигналу в цілому, так і у ковзаючому вікні у часовій області шириною  $T$ , отримуючи функцію  $D_A(T,t)$ . Нажаль, порівнювати значення цієї розмірності з розмірностями самого сигналу не можливо, оскільки насправді  $D_A$  є безпосередньо характеристикою не самого сигналу, а лише «дивного» атрактора нелінійної хаотичної системи, що здатна породити такий сигнал.

### 2.1.5. Особливості застосування

Зауважимо, що вище наведено максимальний варіант методу УФА, використання якого потребує дуже значних витрат часу та обчислювальних потужностей. Останнє означає, що на практиці можна також застосовувати скорочені варіанти методу, використовуючи лише певну частину запропонованих числових характеристик, вибір якої залишається за дослідником у відповідності до його бажань і можливостей.

## 2.2. Метод динамічного фрактального аналізу

### 2.2.1. Основна ідея метода

Динамічний фрактальний аналіз – ДинФА (Dynamical Fractal Analysis – ДунФА) – розробили в 2019 р. А. А. Онищенко, Л. Ф. Черногор та О. В. Лазоренко у роботі [22]. Ідея метода ДинФА полягає у наступному [21, 22].

Обчислення херстової фрактальної розмірності  $D_H = 2 - H$ , що ґрунтується на показникові Херста  $H$ , як відзначалося в підрозділі 1.6, є одним з найпопулярніших методів фрактального аналізу. Але під час дослідження нестационарних сигналів і процесів, фрактальні властивості яких змінюються у часі, для отримання часової залежності показника Херста  $H(t)$  необхідно використовувати віконну функцію у часовій області. Ця ідея успішно використовується у багатьох методах фрактального аналізу при оцінюванні різних фрактальних розмірностей. В той самий час добре відомо, результат, який отримує дослідник, істотно залежить від ширини  $T$  вікна, що застосовується. Нажаль, питання вибору величини  $T$  зазвичай взагалі не обговорюється.

Саме тому автори метода ДинФА пропонують ідею вибору оптимального (в певному сенсі) значення  $T$ .

У багатьох випадках аналізований сигнал або процес містить у собі певні збурення, що цікавлять дослідника, але вони перебувають на фоні шуму невідомої природи. Якщо сигнал є фрактальним, то корисно зрозуміти, чи відрізняється фрактальна розмірність аналізованого сигналу на тих проміжках часу, де зафіксовано збу-

рення, від фрактальної розмірності там, де цього збурення ще (або вже) немає. Відфільтровувати високочастотні компоненти досліджуваного сигналу з метою зниження рівня шумів у цьому випадку не можна, бо є загроза знищити частину інформації про сам ФС, оскільки він дуже часто є ФНШС сигналом.

Тому треба оцінити фрактальну розмірність досліджуваного сигналу з певним фіксованим значенням (або декількома значеннями) ширини  $T$  ковзаючого вікна у часовій області. Це значення, що вважатимемо оптимальним (в певному сенсі) буде напряму залежати від параметрів часо-частотних структур досліджуваного сигналу.

Натомість необхідну інформацію про часо-частотну структуру можна отримати з використанням сучасних методів аналізу сигналів і процесів, що базуються на лінійних і нелінійних інтегральних перетвореннях (див., наприклад, [8]).

### 2.2.2. Обчислювані характеристики

Отже, алгоритм метода ДинФА містить декілька кроків, під час яких обчислюються характеристики (фрактальні та нефрактальні) досліджуваного сигналу або процесу.

По-перше, слід оцінити херстову розмірність  $D_H$  для різних значень положення ( $t$ ) та ширини ( $T$ ) ковзаючого вікна, в результаті чого отримується функція  $D_H(t, T)$ . Її зручно представляти в графічному вигляді так саме, як це робиться для СФ інтегральних перетворень.

По-друге, треба обчислити модуль  $|\dot{W}f(t, T)|$ , аргумент  $\arg \dot{W}f(t, T)$  і скелетон аргумента комплекснозначної СФ аналітичного вейвлет-перетворення (АВП). Саме дослідження цих характеристик дозволяє оцінити характерні періоди сигналу (або тих його частин, що цікавлять дослідника)  $T_i, i = \overline{1, n}$ .

Як відомо (див., наприклад, [105]), СФ АВП сигналу  $s(t)$  задається співвідношенням:

$$\dot{W}f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi^* \left( \frac{t-b}{a} \right) dt, \quad a > 0, \quad -\infty < b < +\infty, \quad (2.8)$$

де  $\psi(t)$  – комплекснозначна вейвлеттвірна функція, відома також як аналітичний вейвлет, «\*» – операція комплексного спряження,  $a$  – параметр масштабування,  $b$  – параметр зсуву.

По-третє, за фіксованих значень  $T_i$  отримуємо набір часових залежностей  $D_{H_i}(t) \equiv D_H(t, T_i)$ . Саме ці залежності найкращим чином і характеризують фрактальні властивості досліджуваного сигналу. Зауважимо, що вибір вейвлета для проведення АВП можна здійснювати, наприклад, із застосуванням метода, що викладено в [8].

Таким чином, метод ДинФА поєднує можливості фрактального аналізу (херстова розмірність) і часо-частотного аналізу (АВП) при дослідженні нестационарних сигналів і процесів довільної природи. Більш того, не обов'язково використовувати виключно херстову розмірність  $D_H$ . На її місці може з'явитися будь-яка інша фрактальна розмірність, зокрема, з числа тих, про які йшлося вище.

### 2.2.3. Формат представлення даних

Для демонстрації результатів застосування методу ДинФА для дослідження сигналів і процесів створено спеціальний формат представлення даних. Розглянемо його на прикладі дослідження класичного модельного ФС у вигляді добре відомої кривої Коха (рис. 2.2, а).

Нагадаємо, що для нього фрактальна розмірність дорівнює  $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1.26$  (див., наприклад, [36]). Саме це значення наведено у вигляді штрихової лінії на рис. 2.2, в – е.

Отже, новий формат представлення даних, який ми використовуємо, зокрема, у цій роботі, а також рекомендуємо іншим дослідникам, має такий вигляд.

У першому рядочку двічі розташовується реалізація досліджуваного сигналу у часовій області (рис. 2.2, а, є). Зроблено це заради зручності співставлення отриманих характеристик із самим сигналом. Далі у першому стовпчику розташовано херстову розмірність  $D_H(t, T)$ , яка зображується на часо-періодній площині у вигляді, характерному для СФ інтегральних перетворень (рис. 2.2, б).

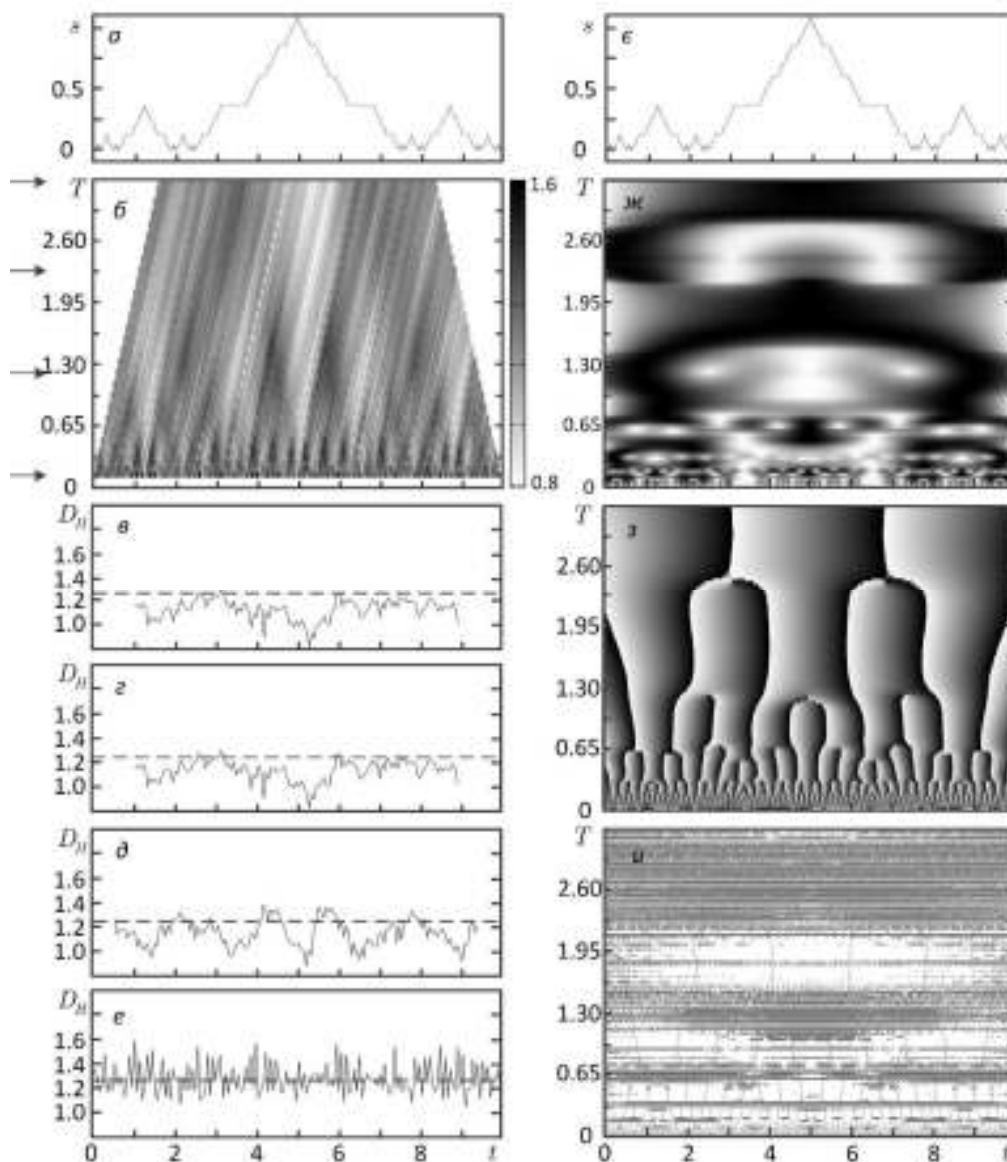


Рисунок 2.2 – Результати аналізу сигналу з використанням метода ДинФА: а, е – сигнал у часовій області, б – херстова розмірність  $D_H(t, T)$ , в, г, д, е – херстова розмірність  $D_{H_i}(t) \equiv D_H(t, T_i)$  за фіксованих значень  $T_i$  (позначено стрілками ліворуч на панелі б); характеристики СФ АВП (вейвлет стог 1-1.5): ж –  $|\dot{W}f(t, T)|$ , з –  $\arg \dot{W}f(t, T)$ , и – скелетон  $\arg \dot{W}f(t, T)$ .

Ліворуч від неї за допомоги чотирьох горизонтальних стрілок вказано чотири характерні значення періоду  $T_i$ , для яких на рис. 2.2, в – е наведено реалізації часової функції херстової розмірності  $D_{H_i}(t) \equiv D_H(t, T_i)$ . У другому стовпчику містяться характеристики СФ АВП, а саме,  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.2, ж),  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис.

2.2, з), скелетон  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.2, и). Саме з їх використанням дослідник визначає необхідні йому періоди  $T_i$ , для яких обчислюються херстові розмірності  $D_{H_i}(t)$ . Зауважимо, що ці характеристики перебувають у правому стовпчику, оскільки тут вони грають допоміжну роль, а основними характеристиками є фрактальні розмірності.

За необхідності на обидва стовпчика можна додавати вертикальні прямі (або кольорові напівпрозорі смуги), що проходять одразу через всі панелі, якщо треба виділити, наприклад, збурення у часовій області.

## **2.3. Фрактальний аналіз фрактальних надширокосмугових сигналів**

### **2.3.1. Фрактальні надширокосмугові сигнали та процеси**

Фрактальні надширокосмугові (ФНШС) сигнали (*fractal ultra-wideband signals*) як окремий клас детермінованих ФС запропоновано в 2004 р. О. В. Лазоренком і Л. Ф. Черногором [8, 169, 170].

Основною перевагою ФНШС сигналів, яка є вкрай привабливою для дослідників, є те, що ФНШС сигнали поєднують в собі властивості як НШС, так і фрактальних сигналів. Зокрема, перші мають підвищену інформативність, а другі – високу завадостійкість. Тому використання ФНШС сигналів у радіолокації та телекомунікаціях виглядає особливо перспективним (див., наприклад, [8, 169, 170]).

Більш того, багато складних процесів у відкритих, нелінійних, динамічних системах, зокрема, у геокосмосі, є НШС процесами (див., наприклад, [3 – 5]), а також мають фрактальні властивості, а тому можуть бути віднесені до класу ФНШС процесів. Результати аналізу саме таких сигналів і процесів наведено в розділі 4 даної дисертаційної роботи.

Вже існуючі та створені автором дисертації нові моделі ФНШС сигналів, з одного боку, стануть у пригоді фахівцям при розв'язанні різноманітних задач у галузях радіолокації, дистанційного радіозондування, радіонавігації, телекомунікацій і т. ін., а з іншого боку, дозволять вдосконалити методи фрактального та мультифрактального аналізів.



### 2.3.2. Нові моделі ФНШС сигналів

У роботі [8] було запропоновано низку моделей детермінованих ФНШС сигналів у часовій області, зокрема, моделі  $FUWB_1(t)$ ,  $FUWB_2(t)$  і  $FUWB_3(t)$ , що використовують безперервні, ніде не диференційовних функціях Вейерштраса, Рімана та Рімана – Вейерштраса, а також моделі на базі «материнських»вейвлетів.

У роботі [13] за участі автора було скореговано визначення ФНШС сигналу. Це було зроблено з наступних міркувань.

З 2004 р. під ФНШС сигналом розуміли НШС сигнал, що має властивість самоафінності та дробову розмірність [8, 169, 170]. Приблизно протягом десяти років це визначення здавалося повністю адекватним. Але воно має недолік, який полягає у тому, що тільки монофрактали, будучи «класичними» фракталами, здатні йому задовольняти. Однак крім монофракталів існує безліч мультифрактальних структур, що є «неоднорідними» фракталами. Їх також слід врахувати. Отже, потрібно нове визначення ФНШС сигналу. Воно сформульовано у 2016 р. [13].

ФНШС сигнал – це НШС сигнал, будь-які характеристики якого є монофрактальними або мультифрактальними.

Для кожної моделі ФНШС сигналу у часовій області  $s(t)$  та для її СФ ОПФ  $\dot{S}(f)$  повинні виконуватись наступні вимоги:

- 1)  $\int_{\tau} s(t)dt = 0$ , де  $\tau$  – тривалість сигналу, 2)  $s(0) = s(\tau) = 0$ ,
- 3)  $s(t)$  безперервна для  $t \in \mathbb{R}$ , де  $\mathbb{R}$  – множина дійсних чисел,
- 4)  $D[s(t)] \notin \mathbb{Z}$ , де  $\mathbb{Z}$  – множина цілих чисел,
- 5)  $s(t)$  має властивість самоафінності для  $t \in [0, \tau]$ .

Нові моделі ФНШС сигналів, що базуються на ще одній множині безперервних, ніде не диференційовних функціях, запропоновано та створено автором дисертації в роботі [13]. Розглянемо їх докладніше. Звертаємо увагу, що задля зручності використовується той самий стиль позначень даних моделей, що застосовувався для згаданих вище моделей ФНШС сигналів. Нижній індекс для нових моделей змінюється в межах від 4 до 13.

Отже, запропоновано десять наступних моделей детермінованих ФНШС сигналів у часовій області, що ґрунтуються на:

1) функції Селлер'є:

$$FUWB_4(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^k} \sin(a^k \pi t) \Theta(t), \quad \Theta(t) = \eta(t) - \eta(t-1), \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

2) функції Дарбу:

$$FUWB_5(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin(\pi(n+1)!t) \Theta(t);$$

3) функції Такагі:

$$FUWB_6(t) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k t + m|, & t \in [-1, 0); \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^k t - m|, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

4) функції Ван-дер-Вардена:

$$FUWB_7(t) = \begin{cases} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k t + m|, & t \in [-1, 0); \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |10^k t - m|, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

5) першій функції Фабера:

$$FUWB_8(t) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k!-1} t + m|, & t \in [-1, 0); \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k!-1} t - m|, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

6) другій функції Фабера:

$$FUWB_9(t) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1}t + m|, & t \in [-1, 0); \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \inf_{m \in \mathbb{Z}} |2^{k-1}t - m|, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

7) функціях Шенберга:

$$FUWB_{10}(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} p(3^{2k}(1+t)), & t \in [-1, 0); \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} p(3^{2k}(1-t)), & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

$$FUWB_{11}(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} p(3^{2k+1}(1+t)), & t \in [-1, 0); \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} p(3^{2k+1}(1-t)), & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases} \quad \begin{matrix} p(x+2n) = p(x), \\ n \in \mathbb{Z}, \\ x \in \mathbb{R}; \end{matrix},$$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/3]; \\ 3x-1, & x \in [1/3, 2/3]; \\ 1, & x \in [2/3, 4/3]; \\ 5-3x, & x \in [4/3, 5/3]; \\ 0, & x \in [5/3, 2]; \end{cases}$$

8) функції Маккарті:

$$FUWB_{12}(t) = \begin{cases} -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k}(t+1)), & t \in [-1, 0); \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} g(2^{2^k}t), & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \notin [-1, 1]; \end{cases}$$

$$g(x + 4n) = g(x), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \in [-2, 0]; \\ 1 - x, & x \in [0, 2]; \end{cases}$$

9) функції Ліу Вена:

$$FUWB_{13}(t) = \begin{cases} -\prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - 2^{-n} \sin \left( 6^n \pi \frac{2}{3} t \right) \right), & t \in [-1, 0); \\ \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + 2^{-n} \sin \left( 6^n \pi \frac{2}{3} t \right) \right), & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Зовнішній вигляд цих моделей у часовій області наведено на рис. 2.3. Для порівняння також наведено модель нефрактального НШС сигналу (рис. 2.3, а) та однієї зі старих моделей ФНШС сигналів, що базується на функції Вейерштраса (рис. 2.3, б). Зазначимо, що інтеграл від кожної моделі ФНШС сигналу по всій області її існування дорівнює нулю, що є однією з основних вимог до ФНШС сигналів (див., наприклад, [8]).

Всі наведені вище моделі ФНШС сигналів є моделями виключно детермінованих ФС. Але на практиці багато досліджуваних ФНШС сигналів і процесів є стохастичними.

Тому у роботах [10, 11] було запропоновано наступну модель стохастичного ФНШС сигналу, що базується на узагальненій функції Вейерштраса [171]:

$$FUWB_{14}(t) = \left[ 1 - b^{2D-4} \right]_{n=0}^M \frac{\sum_{n=0}^M b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n t + \psi_n)}{1 - b^{(2D-4)(M+1)}}; \quad (2.9)$$

де  $t$  – часова змінна,  $b$  і  $s$  – параметри масштабування за часом,  $D$  – фрактальна розмірність сигналу,  $1 < D < 2$ ,  $\psi_n$  – випадкова фаза, що є розподіленою за певним законом на інтервалі  $[0, 2\pi]$ ,  $M$  – кількість гармонік, які використовуються для побудови фізичного фракталу (якщо  $M \rightarrow \infty$ , то ми отримуємо математичний фрактал).

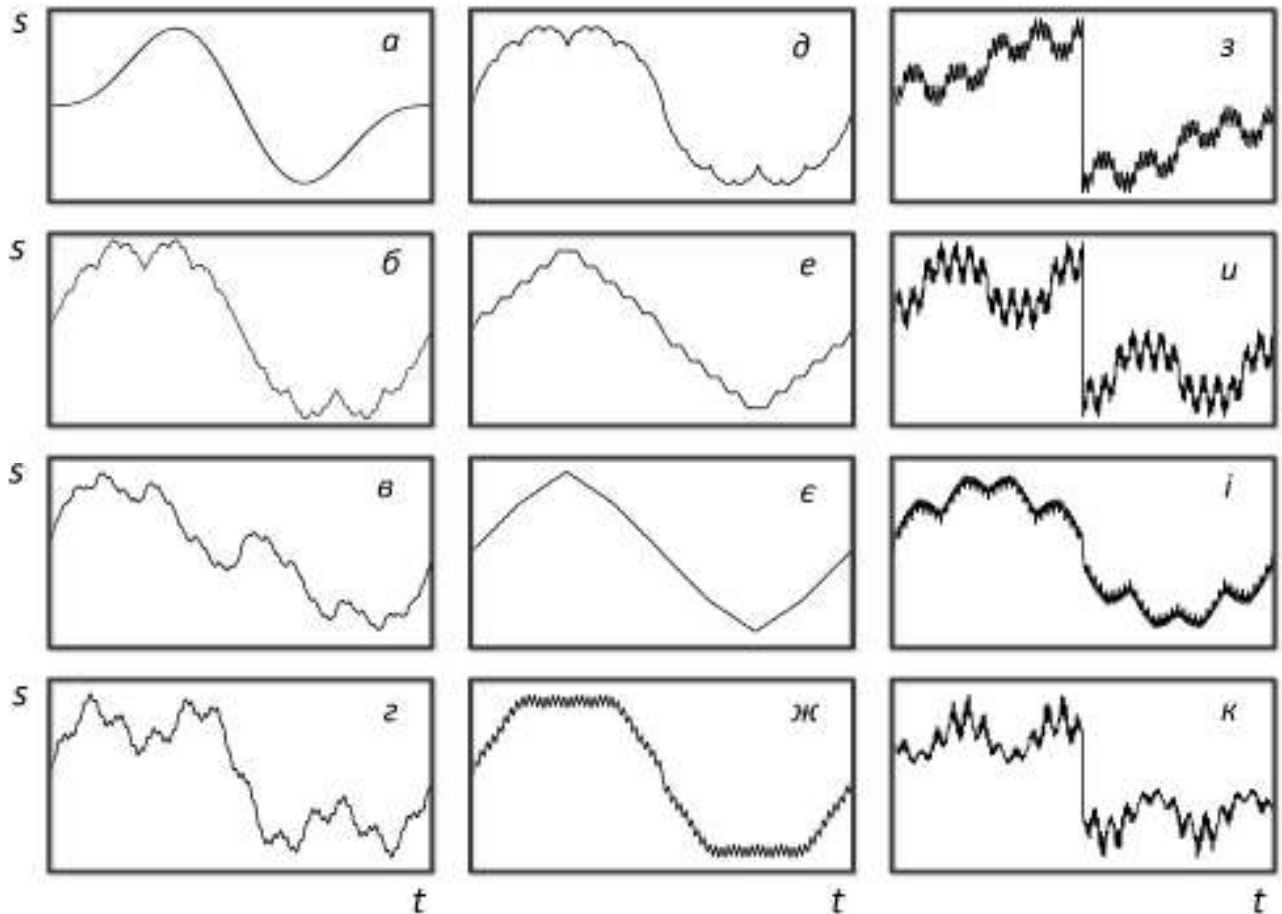


Рисунок 2.3 – Нові моделі детермінованих ФНШС сигналів у часовій області: а – нефрактальний НШС сигнал, б – модель  $FUWB_1$ , що базується на функції Вейєрштраса, в – модель  $FUWB_4$  при  $a=2$ , г – модель  $FUWB_5$ , д – модель  $FUWB_6$ , е – модель  $FUWB_7$ , є – модель  $FUWB_8$ , ж – модель  $FUWB_9$ , з – модель  $FUWB_{10}$ , и – модель  $FUWB_{11}$ , і – модель  $FUWB_{12}$ , к – модель  $FUWB_{13}$ .

До речі, у 2004 р. у роботі [171] стверджувалося, що для практичних цілей достатнім виявляється  $M = 10$ . Останнє було пов'язано, у першу чергу, з обмеженнями на реальний час обчислення модельного сигналу. На сьогодні у зв'язку із суттєвим зростанням потужності ПК ці вимоги послабилися. Тому автор використовував величини  $M$ , що були більшими принаймні на порядок.

Приклад окремих реалізацій моделі  $FUWB_{14}(t)$  в часовій області для різних значень фрактальної розмірності  $D$  наведено на рис. 2.4. Слід звернути увагу на те, що показник широкосмуговості  $\mu$  (див., наприклад, [8]) таких модельних сигналів

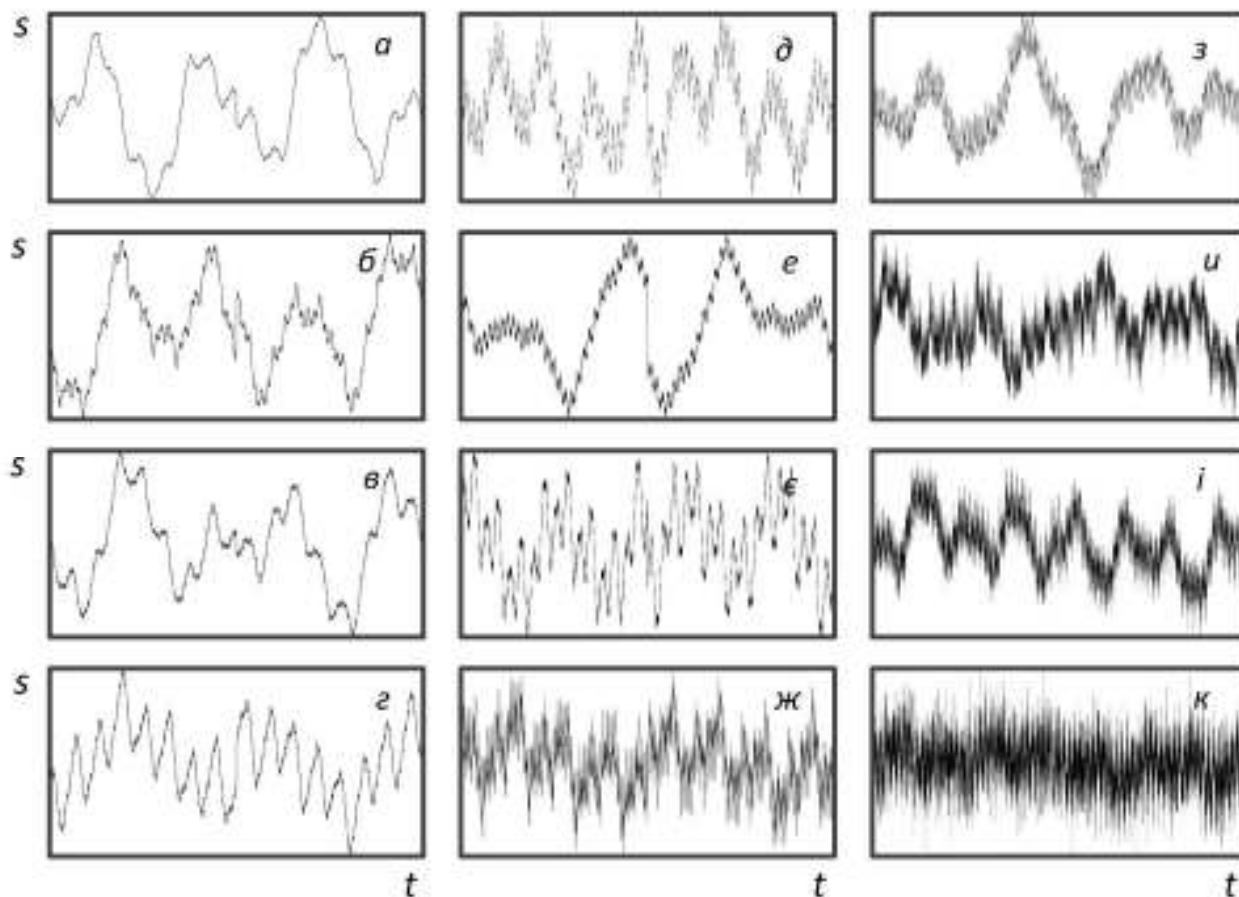


Рисунок 2.4 – Модель стохастичного ФНШС сигналу  $FUWB_{14}$  у часовій області для різних значень фрактальної розмірності  $D$ : а –  $D = 1.05$ , б –  $D = 1.10$ , в –  $D = 1.20$ , г –  $D = 1.30$ , д –  $D = 1.40$ , е –  $D = 1.50$ , є –  $D = 1.60$ , ж –  $D = 1.70$ , з –  $D = 1.80$ , и –  $D = 1.90$ , і –  $D = 1.95$ , к –  $D = 1.99$ .

варіюється у широких межах, оскільки кожна конкретна форма сигналу є принципово випадковою. Показані моделі обчислювалися у  $N = 8192$  точках, кількість врахованих гармонік дорівнювала  $M = 170$ , а випадкова фаза  $\psi_n$  мала рівномірний закон розподілу.

Якщо ж у формулі (2.9) всі значення випадкової фази  $\psi_n$  зробити рівними нулю для  $n = \overline{0, M}$ , то ми отримаємо модель детермінованого ФНШС сигналу:

$$FUWB_{15}(t) = \left[1 - b^{2D-4}\right] \frac{\sum_{n=0}^M b^{(D-2)n} \cos(2\pi s b^n t)}{1 - b^{(2D-4)(M+1)}}. \quad (2.10)$$

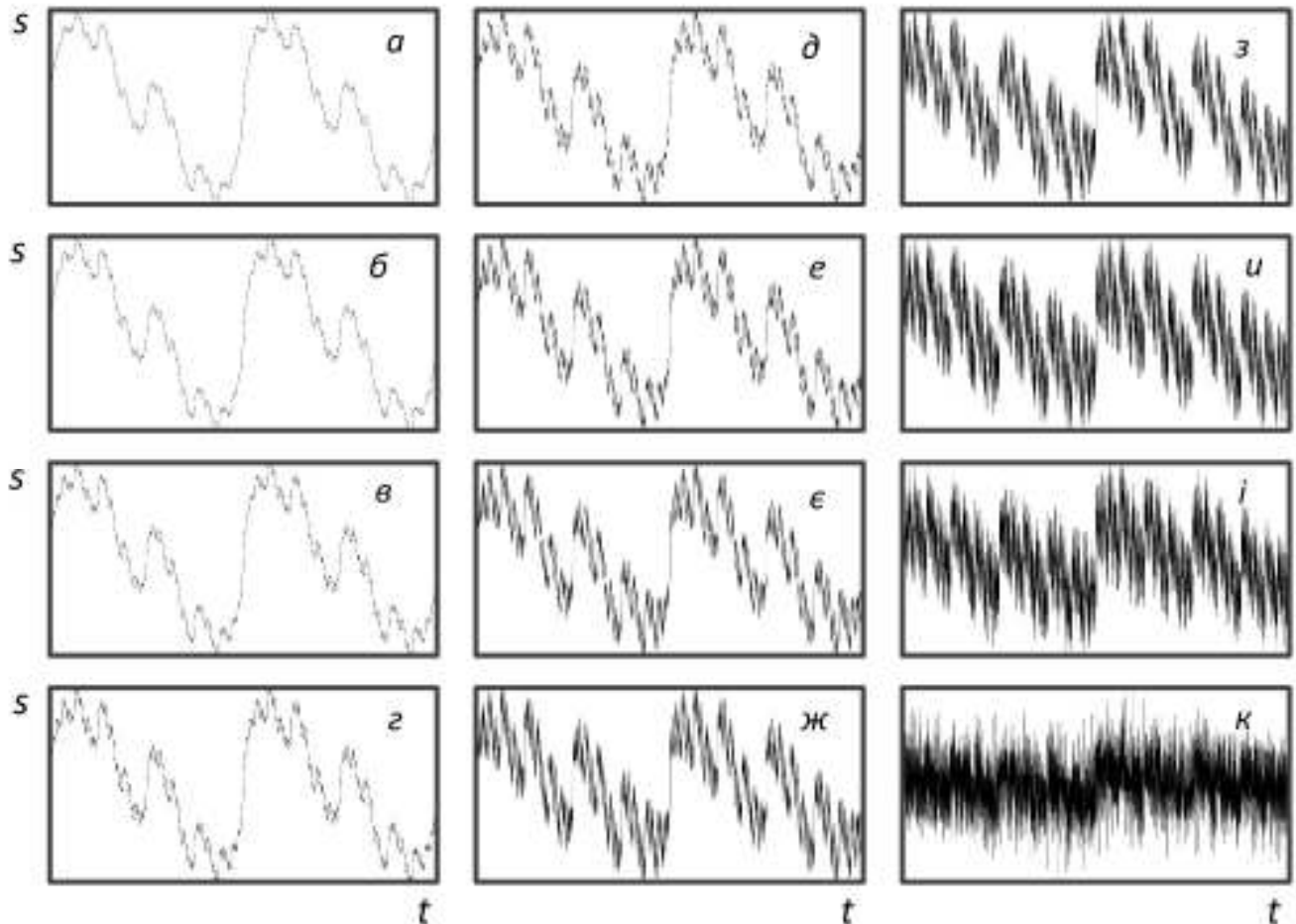


Рисунок 2.5 – Модель детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  у часовій області для різних значень фрактальної розмірності  $D$ : а –  $D = 1.05$ , б –  $D = 1.10$ , в –  $D = 1.20$ , г –  $D = 1.30$ , д –  $D = 1.40$ , е –  $D = 1.50$ , є –  $D = 1.60$ , ж –  $D = 1.70$ , з –  $D = 1.80$ , и –  $D = 1.90$ , і –  $D = 1.95$ , к –  $D = 1.99$ .

Порівняно з наведеними вище моделями детермінованих ФНШС сигналів  $FUWB_1 - FUWB_{13}$ , що мають одне конкретне значення фрактальної розмірності  $D$ , модель  $FUWB_{15}$  дозволяє змінювати величину  $D$  в межах  $1 < D < 2$ . Вид моделі  $FUWB_{15}$  в часовій області для різних значень фрактальної розмірності  $D$  продемонстровано на рис. 2.5.

Видно, що по мірі зростання величини  $D$  збільшується ступінь «порізаності» сигналу, що поступово змінює форму самого сигналу. За великих значень фрактальної розмірності  $D$  ФНШС сигнал все більше нагадує звичайний шум, залишаючись, між тим, чисто детермінованим сигналом.

### 2.3.3. Порівняння ефективностей оцінювання фрактальних розмірностей модельних ФНШС сигналів

У пункті 2.1.2, де розглядалися прямі характеристики, які використовуються в методі УФА, зазначалося, що одними з найефективніших фрактальних розмірностей, котрі застосовуються для описання ФС, є регуляризаційна  $D_R$  та ємнісна  $D_C$  розмірності. Для оцінки останньої створено безліч різноманітних алгоритмів, про що йдеться у підрозділі 1.6. Часто на практиці у якості корисної оцінки ємнісної розмірності  $D_C$  обирають варіаційну розмірність  $D_V$  (про неї досить докладно розповідається у пункті 2.1.2) та клітинну розмірність  $D_B$ , що обчислюється звичайним клітинним методом (див., наприклад, [32, 55, 123, 125, 131]). Вибір саме такої пари оцінок зумовлений не тільки схвальними відгуками провідних фахівців (див., пункт 2.1.2), а й тим, що принципи обчислення цих двох розмірностей є докорінно різними.

Але яким чином впливає вибір методу фрактального аналізу на підсумковий результат? Відповідь на це питання дається автором у роботах [10 – 12].

Отже, з використанням моделі детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$ , яка дає можливість створювати сигнали із заздалегідь заданим значенням фрактальної розмірності  $D$ , встановлено, що клітинна розмірність  $D_B$  дає найкращий результат у діапазоні  $1 \leq D \leq 1.3$ , варіаційна розмірність  $D_V$  – для  $1.3 < D \leq 1.6$ , а регуляризаційна розмірність  $D_R$  – для  $1.6 < D < 2$ . Даний висновок ілюструється відповідними числовими характеристиками, наведеними в табл. 2.2. Сірим кольором тут позначено експериментальні значення оцінюваних фрактальних розмірностей, що найменшим чином відхиляються від заздалегідь заданих теоретичних значень.

Приклад того, яким саме чином із використанням рівняння лінійної регресії у подвійних логарифмічних координатах та методу найменших квадратів отримують клітинну  $D_B$  та регуляризаційну  $D_R$  розмірності, наводиться на рис. 2.6.

Отримані автором результати добре узгоджуються результатами, викладеними у статті [154].



Таблиця 2.2. Експериментальні оцінки фрактальної розмірності модельного сигналу  $FUWB_{15}$

Фрактальна розмірність $D$	Показник широкосмуговості $\mu$	Оцінювана фрактальна розмірність		
		Клітинна $D_B$	Варіаційна $D_V$	Регуляризаційна $D_R$
1.999	1.9999	1.72	1.81	2.02
1.90	1.9995	1.72	1.77	1.94
1.80	1.9993	1.58	1.71	1.84
1.70	1.999	1.54	1.65	1.74
1.60	1.996	1.43	1.57	1.64
1.50	1.985	1.40	1.50	1.55
1.40	1.970	1.34	1.42	1.46
1.30	1.959	1.27	1.35	1.37
1.20	1.943	1.19	1.28	1.29
1.10	1.942	1.13	1.22	1.21
1.001	1.942	1.09	1.17	1.12

Тепер з використанням наведеного вище результату можна оцінити фрактальні розмірності модельних ФНШС сигналів  $FUWB_1 - FUWB_3$  [10, 11].

Результати оцінок для моделі  $FUWB_1$  наведено у табл. 2.3, а для моделі  $FUWB_3$  – у табл. 2.4. Найкращі оцінки виділено сірим кольором. Для моделі  $FUWB_2$ , яка не має параметрів, отримано, що  $D_B = 1.17$ ,  $D_R = 1.29$  та  $D_V = 1.29$ . Із урахуванням отриманих вище діапазонів фрактальних розмірностей за найкращу оцінку фрактальної розмірності даної моделі вважатимемо  $D_B = 1.17$ . Відповідні обчислення проведено також для створених нових моделей ФНШС сигналів  $FUWB_4 - FUWB_{13}$ . [13] У табл. 2.5 наведено результати, що отримано при дослідженні дискретного вектора даних для кожної моделі, який містить у собі  $N = 8192$  відліків.

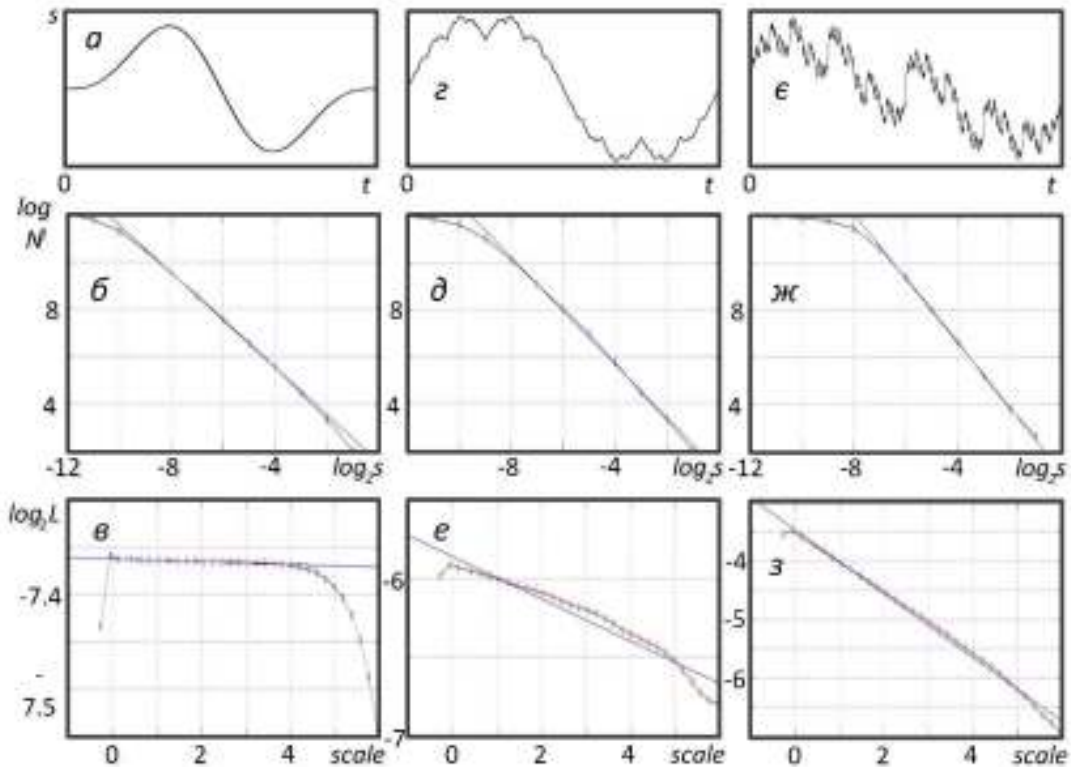


Рисунок 2.6 – Оцінювання фрактальних розмірностей модельних сигналів: а – нефрактальна модель  $UWB(t)$  в часовій області, б – приклад графіка для обчислення її клітинної розмірності  $D_B$ , в – приклад графіка для обчислення її регуляризаційної розмірності  $D_R$ , г, д, е – те ж саме для моделі  $FUWB_1(t)$  з  $a = 0,5$  і  $b = 2$ , є, ж, з – те ж саме для моделі  $FUWB_4(t)$  з  $D = 0,5$ .

Аналогічні результати для цих самих моделей, але для  $N = 16384$  відліків представлено також в табл. 2.5, але значення перебувають у дужках. Сірим виділено оптимальні в указаному вище сенсі значення фрактальних розмірностей.

Оскільки тут досліджувалися детерміновані моделі ФНШС сигналів, похибка визначення відповідної фрактальної розмірності визначалася як похибка визначення кутового коефіцієнта лінійної регресії у відповідному алгоритмі. Для всіх наведених значень у табл. 2.2 – 2.5 вона не перевищувала 5 – 7 %.

Таким чином, використовуючи регуляризаційну  $D_R$ , клітинну  $D_B$  та варіаційну  $D_V$  розмірностей, можна проводити оцінювання «оптимальної» в указаному сенсі фрактальної розмірності  $D$  досліджуваного сигналу. Клітинна розмірність

Таблиця 2.3. Оцінки фрактальних розмірностей для модельного ФНШС сигналу  $FUWB_1(t)$  за різних значень параметрів  $\alpha$  і  $\beta$ .

Параметри		Оцінювана фрактальна розмірність		
$\alpha$	$\beta$	$D_R$	$D_B$	$D_V$
0.5	2	1.14	1.14	1.13
0.6		1.28	1.23	1.27
0.7		1.45	1.35	1.43
0.8		1.58	1.47	1.56
0.9		1.69	1.56	1.66
0.999		1.95	1.66	1.82
0.3	4	1.22	1.20	1.22
0.4		1.36	1.28	1.34
0.5		1.48	1.46	1.45
0.6		1.58	1.56	1.54
0.7		1.65	1.59	1.61
0.8		1.74	1.61	1.67
0.9		1.81	1.63	1.71
0.999		1.87	1.69	1.78
0.2		6	1.29	1.31
0.3	1.41		1.37	1.34
0.4	1.52		1.44	1.45
0.5	1.60		1.48	1.54
0.6	1.67		1.54	1.61
0.7	1.73		1.62	1.66
0.8	1.77		1.58	1.69
0.9	1.82		1.55	1.71

Таблиця 2.4. Оцінки фрактальних розмірностей для модельного ФНШС сигналу  $FUWB_3(t)$  за різних значень параметру  $b$ .

Параметр	Оцінювана фрактальна розмірність		
	$D_R$	$D_B$	$D_V$
$b$			
0.51	1.78	1.43	1.61
0.6	1.68	1.38	1.56
0.7	1.58	1.35	1.50
0.8	1.48	1.29	1.43
0.9	1.38	1.22	1.36
1.0	1.29	1.18	1.29
1.1	1.21	1.16	1.22
1.2	1.14	1.09	1.15
1.3	1.09	1.06	1.10
1.4	1.06	1.03	1.07
1.5	1.04	1.01	1.05

$D_B$  дає найкращий результат у діапазоні  $1 \leq D \leq 1.3$ , варіаційна розмірність  $D_V$  – для  $1.3 < D \leq 1.6$ , а регуляризаційна розмірність  $D_R$  – для  $1.6 < D < 2$ .

Між тим, слід зазначити, що такий алгоритм є занадто примітивним, а його застосування стане у пригоді лише задля здійснення «грубих» оцінок фрактальної розмірності  $D$ . Більш того, в ідеальному випадку очікується, що оцінювані значення  $D_R$ ,  $D_B$  і  $D_V$  мають точно співпадати з істинним значенням фрактальної розмірності  $D$  досліджуваного сигналу або процесу, тобто  $D_R = D$ ,  $D_B = D$  та  $D_V = D$  на всьому проміжку  $D \in [1, 2)$ . Але насправді ми маємо там справу з деякими монотонно зростаючими нелінійними функціями  $D_R = f(D)$ ,  $D_B = g(D)$  та  $D_V = h(D)$ , кожна з яких лише на вказаних інтервалах змінної  $D$  менше за інші відхиляється від очікуваної прямої лінії. Отже, доцільно було б відшукати ці нелінійні залежності та використати їх.

З іншого боку, добре відомо (див., наприклад, [123, 125, 128, 129, 153]), що оптимальне значення оцінюваної фрактальної розмірності  $D$  також суттєво залежить від кількості відліків  $N$  досліджуваного сигналу. Цей факт є дуже важливим, зокрема, через те, що в межах методу ДинФА низка фрактальних розмірностей обчислюються не тільки для всього сигналу в цілому, а й для його частин (у ковзаючому «вікні» у часовій області). Виникають, принаймні, два важливих запитання:

1) до якої межі можна зменшувати ширину «вікна»?

2) наскільки коректно порівнювати між собою значення однієї тієї самої розмірності, обчислені у «вікнах» істотно різної довжини?

На жаль, інформація щодо цих питань, яка міститься у доступних літературних джерелах (див., наприклад, [123, 125, 128, 129, 153]), подекуди є неоднозначною та суперечливою.

Для дослідження наявності вказаної тенденції нами було обрано три моделі ФНШС сигналів, для яких оптимальні значення задаються трьома різними розмірностями (див. табл. 2.5), а саме  $FUWB_{11}$ ,  $FUWB_4$  та  $FUWB_9$ .

Результати відповідних обчислень наведено у табл. 2.6. Сірим кольором у ній виділено оптимальні значення оцінюваних фрактальних розмірностей, які було наведено у табл. 2.5 для відповідних модельних ФНШС сигналів. Видно, що для регуляризаційної  $D_R$  і варіаційної  $D_V$  розмірностей із збільшенням кількості відліків аналізованого сигналу  $N$ , починаючи з  $N = 512$ , спостерігається тенденція поступового зростання отримуваної точкової оцінки розмірності із одночасним зменшенням величини її абсолютної похибки. Для менших значень  $N$  регуляризаційна розмірність  $D_R$  змінюється, скоріш за все, безсистемно, а варіаційна розмірність  $D_V$  досить різко зростає із зменшенням  $N$ . Натомість для клітинної розмірності  $D_B$  таких змін майже не відчувається.

На жаль, використовуючи результати, наведені у табл. 2.6, можна лише продемонструвати факт наявності залежності величини оцінюваної фрактальної

Таблиця 2.5. Оцінки фрактальних розмірностей модельних ФНШС сигналів  $FUWB_4 - FUWB_{13}$  для кількості відліків  $N = 8192$  та  $N = 16384$  (в дужках).

Модель ФНШС сигналу	Оцінювана фрактальна розмірність		
	$D_R$	$D_B$	$D_V$
$FUWB_4$	1.16 (1.12)	1.07 (1.07)	1.11 (1.11)
$FUWB_5$	1.22 (1.18)	1.12 (1.15)	1.18 (1.16)
$FUWB_6$	1.12 (1.11)	1.11 (1.11)	1.12 (1.10)
$FUWB_7$	1.09 (1.08)	1.08 (1.08)	1.09 (1.11)
$FUWB_8$	1.02 (1.01)	1.03 (1.03)	1.01 (1.01)
$FUWB_9$	1.43 (1.49)	1.35 (1.36)	1.51 (1.48)
$FUWB_{10}$	1.60 (1.60)	1.42 (1.47)	1.56 (1.60)
$FUWB_{11}$	1.62 (1.64)	1.47 (1.56)	1.61 (1.59)
$FUWB_{12}$	1.51 (1.46)	1.49 (1.45)	1.54 (1.49)
$FUWB_{13}$	1.59 (1.58)	1.45 (1.46)	1.54 (1.54)

розмірності від кількості відліків  $N$  аналізованого сигналу, тобто показати, що  $D_R = f(D, N)$ ,  $D_B = g(D, N)$  та  $D_V = h(D, N)$ .

Відповідь на сформульовані вище два питання щодо мінімальної кількості відліків сигналу та коректності порівняння оцінок фрактальної розмірності, зроблених для різних значень  $N$ , буде надана в межах методу коригуючої функції, який наведено в підрозділі 2.4.

#### 2.3.4. Частотна та часо-частотна структури ФНШС сигналів

Зважаючи на те, що часова структура ФНШС сигналу є фрактальною, то можна очікувати, що його частотна та часо-частотна структури також матимуть певні фрактальні властивості [10 – 12].

Частотна структура сигналу представлена модулем функції спектральної густини (ФСГ) ОПФ. Часо-частотна структура сигналу описується ФСГ БВП та її скелетом. Як добре відомо (див., наприклад, [105]), скелетон – це сукупність хребтів

двовимірної дійсної функції. Натомість хребет – це лінія на площині, яка поєднує точки локальних екстремумів (мінімумів і максимумів) даної функції.

Результати відповідних обчислень, проведених для моделі нефрактального НШС сигналу  $UWB(t)$  та для моделей ФНШС сигналів  $FUWB_1(t)$  і  $FUWB_4(t)$  наведено на рис. 2.7. На рис. 2.7, е, и, де перебувають ФСГ ОПФ моделей ФНШС сигналів добре спостерігається фрактальна структура (вісь ординат показана у логарифмічному масштабі). Натомість для нефрактального НШС сигналу (рис. 2.7, б) такої структури немає. Також на рис. 2.7, є, і добре видно характерну «кущоподібну» фрактальну структуру ФСГ БВП модельних ФНШС сигналів. Те саме спостерігається і для її скелетонів (рис. 2.7, ж, к). Треба зазначити, що для проведення БВП використовувався вейвлет Морле, який також має фрактальну природу. Ще один аналогічний приклад наведено на рис. 2.8, де містяться результати аналізу часо-частотної структури модельних ФНШС сигналів  $FUWB_5(t)$  і  $FUWB_{12}(t)$  з використанням фрактального вейвлета Койфмана (койфлета)  $\text{coif1}$  [13].

Важливо, що хоча ФСГ БВП та її скелетон є «нащадками» як самого аналізованого сигналу, так і вейвлета, у випадку нефрактального сигналу (рис. 2.7, в, г) ніякої фрактальної структури не виникає. Якщо ж для аналізу ФС застосовувати нефрактальний вейвлет, то ми отримуємо дещо розмиту, але ж обов'язково фрактальну картину.

#### 2.4. Метод коригуючої функції

Отже, як продемонстровано вище в пункті 2.3.3, будь-який метод оцінки фрактальної розмірності  $D$  досліджуваного сигналу дає досить неточний результат, оскільки отримуваний результат є невідомою нелінійною функцією як величини  $D$ , так і кількості відліків  $N$  аналізованого сигналу, тобто для регуляризаційної, клітинної та варіаційної розмірностей можна записати, що  $D_R = f(D, N)$ ,  $D_B = g(D, N)$  та  $D_V = h(D, N)$  відповідно. Зрозуміло, що характер цих залеж-

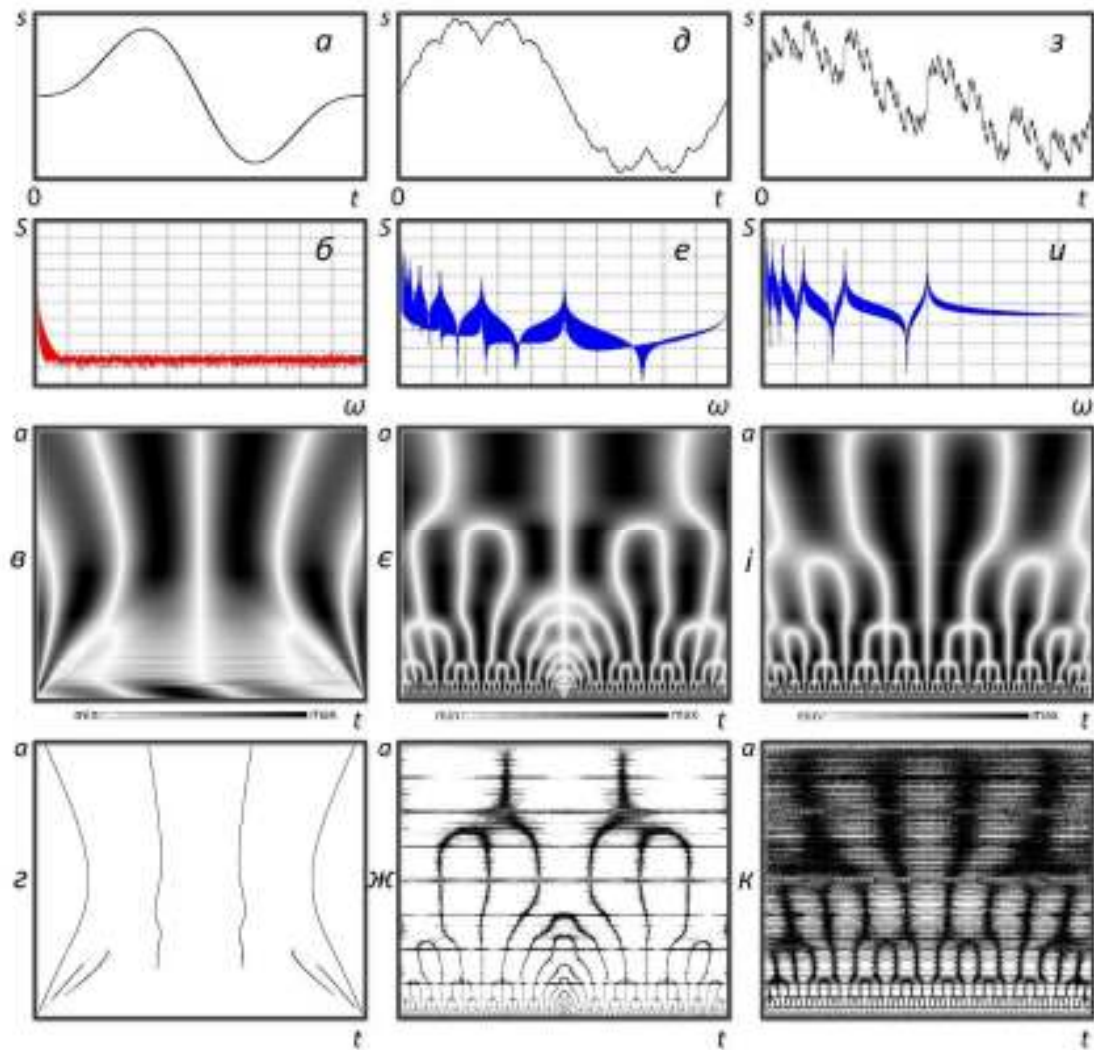


Рисунок 2.7 – Частотна та часо-частотна структура НШС і ФНШС сигналів: а – нефрактальна модель  $UWB(t)$  в часовій області, б – ФСГ ОПФ моделі  $UWB(t)$ , в – ФСГ БВП моделі  $UWB(t)$  (вейвлет Морле), г – скелетон ФСГ БВП моделі  $UWB(t)$ , д, е, є, ж – те ж саме для моделі  $FUWB_1(t)$  з  $a = 0,5$  і  $b = 2$ , є, з, и, і, к – те ж саме для моделі  $FUWB_4(t)$  з  $D = 0,5$ .

ностей є унікальним для кожного окремого методу монофрактального аналізу, а головне – залежності завжди є нелінійними. Дослідити ж цей характер теоретично, виходячи виключно з алгоритму конкретного методу, скоріш за все, є неможливим. Принаймні, у доступних літературних джерелах подібних результатів виявити не вдалося.



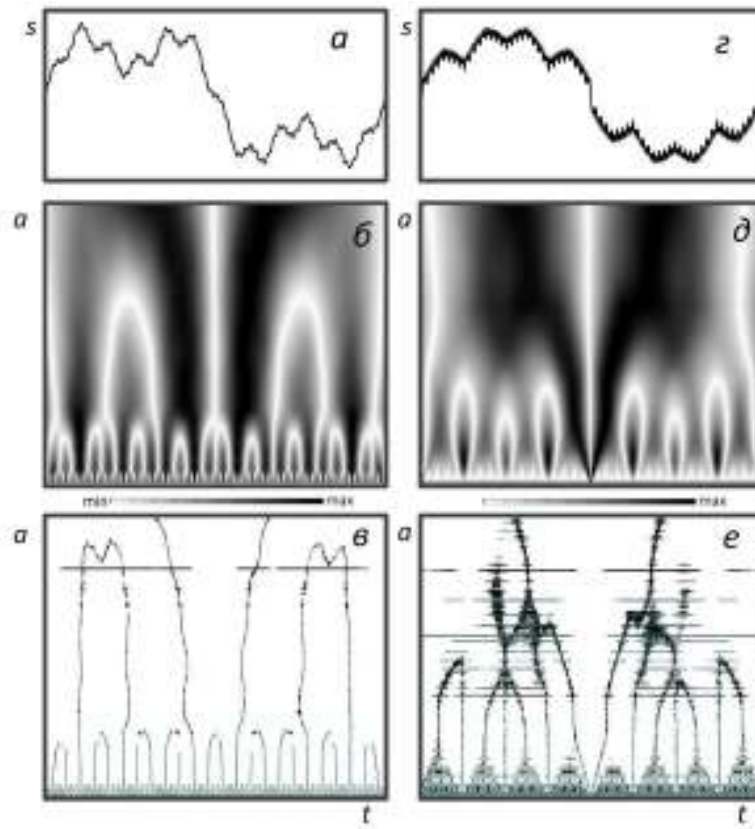


Рисунок 2.8 – Часо-частотна структура модельних ФНШС сигналів: а – модель  $FUWB_5(t)$  в часовій області, б – ФСГ БВП моделі  $FUWB_5(t)$  (вейвлет `coif1`), в – скелетон ФСГ БВП моделі  $FUWB_5(t)$ , г – модель  $FUWB_{12}(t)$  в часовій області, д – ФСГ БВП моделі  $FUWB_{12}(t)$  (вейвлет `coif1`), е – скелетон ФСГ БВП моделі  $FUWB_{12}(t)$ .

Натомість при аналізі нестационарних (у сенсі фрактальних властивостей) сигналів і процесів наявність такої нелінійної залежності між істинним значенням фрактальної розмірності та отримуваною в ході застосування обраного методу фрактального аналізу оцінкою стає дуже важливою, оскільки виникаючі нелінійні спотворення можуть, у підсумковому рахунку, призвести до невірних висновків щодо фрактальних властивостей досліджуваного процесу або явища.

Для практичних цілей, на нашу думку, цілком корисним та ефективним шляхом виходу із даної ситуації може бути так званий метод коригуючої функції (КФ) для монофрактального аналізу, запропонований в 2022 р. А. А. Онищенком, Л. Ф. Черногором та О. В. Лазоренком у роботі [24]. Його суть є наступною.

### 2.4.1. Основна ідея методу

Нехай є конкретний окремий метод монофрактального аналізу, який дозволяє отримати оцінку  $D^*$  невідомої фрактальної розмірності  $D$  досліджуваного сигналу, що представлено дискретним вектором даних, який містить  $N$  відліків. Отримувана оцінка  $D^*$  є невідомою нелінійною функцією величин  $D$  та  $N$ , тобто  $D^* = f(D, N)$ .

Отримаємо значення цієї функції на дискретній сітці:  $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Для цього необхідно обрати модельний ФС, для якого величина його фрактальної розмірності  $D$  є заздалегідь відомою та може змінюватись у діапазоні  $1 \leq D < 2$ . Чим щільнішою є дискретна сітка, тим краще, але збільшення величин  $n$  і  $m$  обмежується розумним об'ємом вектора даних, що зберігає величини  $D_{ij}^*$  та часом їх обчислення для обраного методу монофрактального аналізу.

Кожна величина  $D_{ij}^*$  представляється власною інтервальною оцінкою:

$$D_{ij}^* = \overline{D_{ij}^*} \pm \Delta D_{ij}^*, \quad (2.11)$$

де точкове значення  $\overline{D_{ij}^*}$  та похибка  $\Delta D_{ij}^*$  визначаються конкретним методом монофрактального аналізу. Отже, функцію на дискретній сітці  $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$  отримано.

Між тим, основною нашою задачею є отримання оцінки невідомого значення фрактальної розмірності  $D$  аналізованого сигналу за відомим значенням  $D^*$  при відомому фіксованому значенні кількості відліків  $N = N_{sig}$ . Іншими словами, за фіксованого значення  $N_{sig}$  функція  $D^* = f(D, N_{sig})$  як функція однієї змінної на проміжку  $1 \leq D < 2$  повинна мати обернену функцію  $D = f^{-1}(D^*, N_{sig})$ . Добре відомо, що це відбуватиметься тільки тоді, коли функція  $D^* = f(D, N_{sig})$  монотонною там. У даному конкретному випадку функція  $D^* = f(D, N_{sig})$  повинна

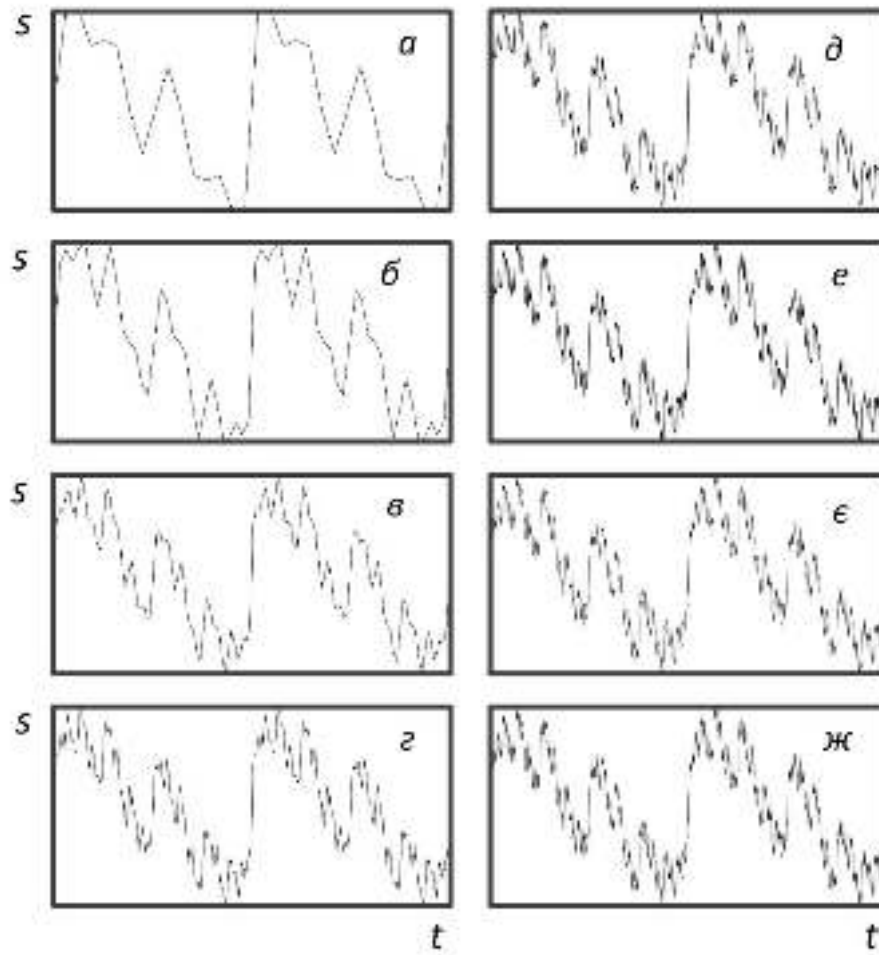


Рисунок 2.9 – Модель детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  у часовій області для різних  $D = 1.50$  для різних значень кількості відліків  $N$  (стратегія 1): а –  $N = 32$ , б –  $N = 64$ , в –  $N = 128$ , г –  $N = 256$ , д –  $N = 512$ , е –  $N = 1024$ , є –  $N = 2048$ , ж –  $N = 4096$ .

бути зростаючою функцією  $D$  на вказаному проміжку. За порівняно великих значень  $N_{sig}$  ніяких проблем з цим не виникає. Але по мірі зменшення  $N_{sig}$  для функції  $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$  знаходиться таке значення  $N_{min}$ , нижче якого ( $j = \overline{1, (min-1)}$ ) указана вище монотонність функції  $D^* = f(D, N_{sig})$  вже порушується. Це пояснюється такими міркуваннями.

Наприклад, модельний ФНШС сигнал  $FUWB_{15}(t)$  з  $D = 1.50$  (рис. 2,9) задано великою кількістю відліків (наприклад,  $N = 131072 = 2^{17}$ ). Зменшувати кількість відліків  $N$  можна з використанням двох принципово різних стратегій.

Стратегія 1 («стратегія децимації»). Почнемо зменшувати  $N$  на кожному кроці вдвічі, використовуючи операцію децимації початкового сигналу. За використання прийнятної для друкованої продукції роздільної здатності (600 точок на дюйм) до  $N = 4096 = 2^{12}$  (рис. 2,9, ж) неозброєним оком ми не побачимо жодних змін. Але з теорії сигналів добре відомо, що така операція є еквівалентною пропусканню сигналу через фільтр високих частот. У результаті цього його спектр поступово звужуватиметься, а його фрактальні властивості погіршуватимуться. Це добре видно на рис. 2.9. Отже, зміни у отримуваній фрактальній розмірності  $D$  в такому випадку пояснюються змінами спектрального складу початкового сигналу.

Приклад того, яким чином залежать від кількості відліків сигналу  $N$  отримувані оцінки для регуляризаційної  $D_R$ , клітинної  $D_B$  та варіаційної  $D_V$  розмірностей модельних ФНШС сигналів  $FUWB_{11}$ ,  $FUWB_4$  та  $FUWB_9$ , продемонстровано у табл. 2.6. Аналогічні оцінки херстової розмірності  $D_H$  для тих самих моделей ФНШС сигналів наведено в табл. 2.7.

Стратегія 2 («стратегія звуження вікна»). Друга стратегія полягає не в децимації початкового сигналу, а у поступовому звуженні (наприклад, вдвічі) прямокутного вікна у часовій області, крізь яке ми дивимось на сигнал. Якщо для першої стратегії ми після кожного кроку маємо «погіршену» копію початкового сигналу, то для другої стратегії ми бачимо тільки його окрему частину (рис. 2.10). Видно, що із зменшенням величини  $N$  характер змін досліджуваного сигналу є зовсім іншим. А тому й оцінки фрактальної розмірності такого сигналу будуть мати дещо інші значення, про що йтиметься нижче. До того ж указана вище монотонність функції  $D^* = f(D, N_{sig})$  буде порушуватись взагалі-то за інших фіксованих значень  $N_{sig}$ , а тому величини  $N_{min}$ , отримані для обох стратегій, можуть відрізнитися.

Тепер декілька слів про застосування двох даних стратегій на практиці. Коли нам треба аналізувати довільний сигнал із заданою кількістю його відліків  $N$ , то цілком слушним виглядає використання першої стратегії, оскільки ми вважаємо, що перед нами є цілий сигнал, що має певні монофрактальні властивості. Але коли

Таблиця 2.6. Оцінки фрактальних розмірностей модельних ФНШС сигналів  $FUWB_{11}$ ,  $FUWB_4$  та  $FUWB_9$  для різної кількості відліків  $N$ .

Кількість відліків, $N$	Модель та оцінювана фрактальна розмірність		
	$FUWB_{11}, D_R$	$FUWB_4, D_B$	$FUWB_9, D_V$
32	$1.55 \pm 0.17$	$0.94 \pm 0.05$	$1.94 \pm 0.16$
64	$1.52 \pm 0.29$	$1.03 \pm 0.03$	$1.84 \pm 0.28$
128	$1.55 \pm 0.17$	$1.05 \pm 0.01$	$1.68 \pm 0.22$
256	$1.60 \pm 0.16$	$1.06 \pm 0.01$	$1.49 \pm 0.11$
512	$1.57 \pm 0.14$	$1.08 \pm 0.01$	$1.38 \pm 0.02$
1024	$1.62 \pm 0.13$	$1.08 \pm 0.01$	$1.31 \pm 0.05$
2048	$1.63 \pm 0.09$	$1.08 \pm 0.02$	$1.35 \pm 0.04$
4096	$1.61 \pm 0.10$	$1.08 \pm 0.02$	$1.41 \pm 0.06$
8192	$1.62 \pm 0.10$	$1.07 \pm 0.02$	$1.51 \pm 0.04$
16384	$1.64 \pm 0.10$	$1.07 \pm 0.02$	$1.48 \pm 0.03$
32768	$1.64 \pm 0.09$	$1.07 \pm 0.02$	$1.50 \pm 0.03$
65536	$1.64 \pm 0.08$	$1.07 \pm 0.02$	$1.50 \pm 0.03$
131072	$1.65 \pm 0.08$	$1.07 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.03$
262144	$1.65 \pm 0.08$	$1.07 \pm 0.01$	$1.50 \pm 0.03$

нам треба будувати фрактограму (як раніше зазначалося, так часто називають часову залежність будь-якої фрактальної розмірності  $D = D(t)$ ), наприклад, при застосуванні методів УФА та ДинФА, то на досліджуваний сигнал обов'язково накладається ковзаюче у часовій області вікно. Тоді стає у пригоді друга стратегія.

Повернемося до отриманої вище величини  $N_{\min}$ . Її сенс полягає в тому, що вона є мінімальним значенням довжини сигналу, для якого ще можна використовувати даний метод монофрактального аналізу. Це є відповіддю на перше запитання, поставлене в пункті 2.3.3. Зауважимо також, що чим щільнішою є дискретна сітка, на якій пораховано функцію  $D_{ij}^* = f(D_i, N_j)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , тим точнішою є оцінка величини  $N_{\min}$ .

Таблиця 2.7. Оцінки херстової розмірності  $D_H$  модельних ФНШС сигналів  $FUWB_{11}$ ,  $FUWB_4$  та  $FUWB_9$  для різної кількості відліків  $N$ .

Кількість відліків, $N$	Модель ФНШС сигналу		
	$FUWB_{11}$	$FUWB_4$	$FUWB_9$
32	$1.53 \pm 0.06$	$1.31 \pm 0.04$	$1.06 \pm 0.03$
64	$1.46 \pm 0.03$	$1.26 \pm 0.03$	$1.33 \pm 0.04$
128	$1.50 \pm 0.03$	$1.25 \pm 0.02$	$0.97 \pm 0.04$
256	$1.54 \pm 0.01$	$1.24 \pm 0.01$	$1.11 \pm 0.02$
512	$1.52 \pm 0.01$	$1.23 \pm 0.01$	$1.23 \pm 0.01$
1024	$1.565 \pm 0.004$	$1.225 \pm 0.005$	$1.20 \pm 0.01$
2048	$1.582 \pm 0.003$	$1.220 \pm 0.004$	$1.199 \pm 0.007$
4096	$1.542 \pm 0.002$	$1.215 \pm 0.003$	$1.216 \pm 0.005$
8192	$1.554 \pm 0.002$	$1.211 \pm 0.002$	$1.184 \pm 0.004$
16384	$1.566 \pm 0.001$	$1.208 \pm 0.001$	$1.231 \pm 0.002$
32768	$1.549 \pm 0.001$	$1.205 \pm 0.001$	$1.230 \pm 0.002$
65536	$1.545 \pm 0.001$	$1.203 \pm 0.001$	$1.221 \pm 0.001$
131072	$1.552 \pm 0.001$	$1.201 \pm 0.001$	$1.222 \pm 0.001$

Далі будемо власне КФ:

$$Cf_{ij} = \frac{D_{ij}^*}{D_i} = \frac{f(D_i, N_j)}{D_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{\min, m}. \quad (2.12)$$

Зауважимо, що для  $j = \overline{1, (\min - 1)}$  робити цього немає сенсу, оскільки там не виконується умова монотонності функції  $D^* = f(D, N_{sig})$ . Отже, КФ є функцією двох дискретних змінних  $Cf_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{\min, m}$ .

Далі аналізуємо кількість відліків аналізованого сигналу  $N_{sig}$ . Вважаємо, що умова  $N_{sig} \geq N_{\min}$  вже виконана (інакше всі подальші дії втрачають сенс через

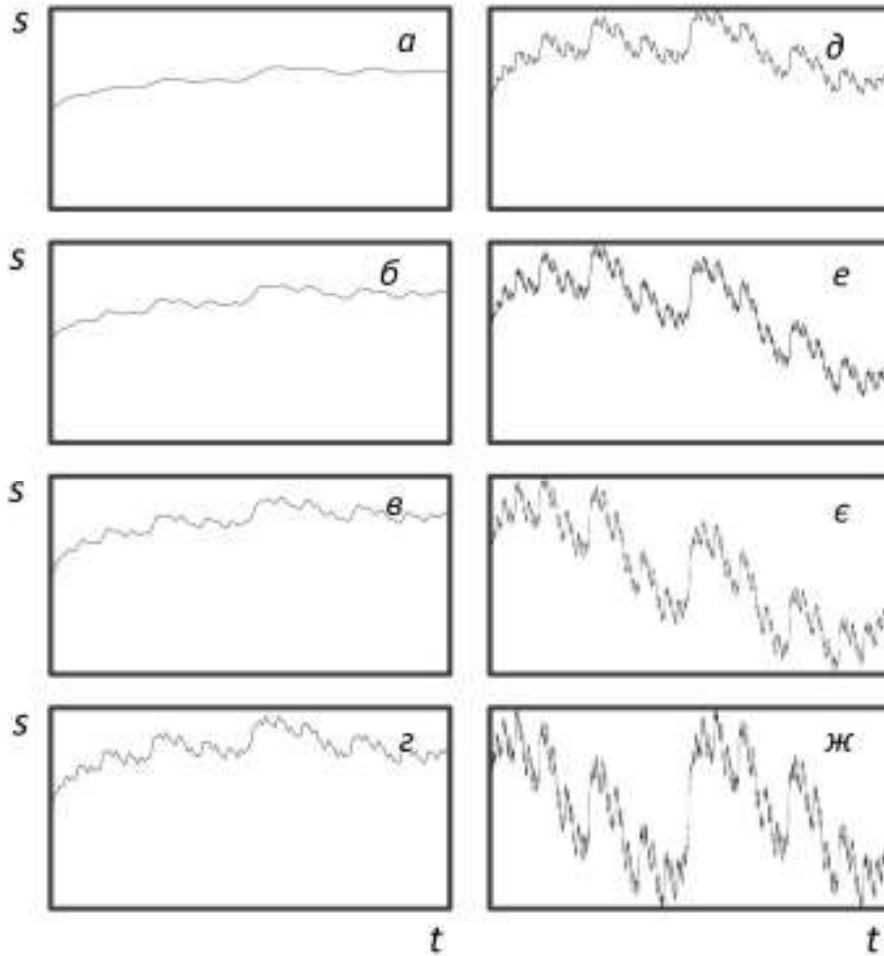


Рисунок 2.10 – Модель детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  у часовій області для різних  $z$  з  $D = 1.50$  для різних значень кількості відліків  $N$  (стратегія 2): а –  $N = 32$ , б –  $N = 64$ , в –  $N = 128$ , г –  $N = 256$ , д –  $N = 512$ , е –  $N = 1024$ , є –  $N = 2048$ , ж –  $N = 4096$ .

принципову неможливість коректного застосування обраного методу фрактального аналізу).

Визначаємо величину  $l$  з умови  $N_l \leq N_{sig} < N_{l+1}$ . Після цього будемо дискретний вектор  $Cf_i$  на основі КФ  $Cf_{ij}$ . Для цього, використовуючи лінійну апроксимацію коригуючої функції за змінною  $N$  між  $N_l$  та  $N_{l+1}$  для кожного фіксованого значення  $i = \overline{1, n}$ , отримуємо:

$$Cf_i = Cf_{il} + (Cf_{i(l+1)} - Cf_{il}) \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l}. \quad (2.13)$$

Тепер, маючи дискретний вектор  $Cf_i$ , можна обчислити відповідні дискретні значення  $D_i^* = Cf_i \cdot D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Далі, вважаючи залежність між  $D$  і  $D^*$  лінійною на кожному відрізку  $D_p \leq D \leq D_{p+1}$ ,  $1 \leq p \leq (n - 1)$ , можна сконструювати наступну кусково-неперервну функцію  $D^* = Cf(D)$ ,  $1 \leq D < 2$ :

$$\frac{D^* - D_p^*}{D_{p+1}^* - D_p^*} = \frac{D - D_p}{D_{p+1} - D_p}, \quad 1 \leq p \leq (n - 1).$$

Саме ця функція й дозволяє за відомою величиною оцінки фрактальної розмірності  $D^*$ , яка обчислюється в обраному методі монофрактального аналізу, отримати величину фрактальної розмірності:

$$D = D_p + \frac{D^* - Cf_p \cdot D_p}{Cf_{p+1} \cdot D_{p+1} - Cf_p \cdot D_p} (D_{p+1} - D_p), \quad (2.14)$$

де величина  $p$ , яка приймає натуральні значення та задовольняє умові  $1 \leq p \leq (n - 1)$ , визначається зі співвідношення:

$$Cf_p \cdot D_p \leq D^* \leq Cf_{p+1} \cdot D_{p+1}.$$

Зважаючи на те, що згідно співвідношенню (2.11), як обчислювані підчас моделювання оцінки величин  $D_{ij}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , так і отримувані для аналізованого сигналу значення фрактальних розмірностей  $D^*$  задано в інтервальній формі

$$D^* = \overline{D^*} \pm \Delta D^*,$$

оцінку фрактальної розмірності  $D$  також слід записати в аналогічному вигляді:

$$D = \overline{D} \pm \Delta D, \quad (2.15)$$

де у відповідності до формул (2.12) – (2.14) маємо:

$$\overline{D} = D_p + \frac{\overline{D^*} - \overline{Cf_p} \cdot D_p}{\overline{Cf_{p+1}} \cdot D_{p+1} - \overline{Cf_p} \cdot D_p} (D_{p+1} - D_p); \quad (2.16)$$

$$\overline{Cf_i} = \overline{Cf_{il}} + \left( \overline{Cf_{i(l+1)}} - \overline{Cf_{il}} \right) \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l}; \quad (2.17)$$



$$\overline{Cf_{ij}} = \frac{\overline{D_{ij}^*}}{D_i}; \quad (2.18)$$

$$\Delta D = \left( \overline{D} - D_p \right) \times \left[ \frac{\Delta D^* + \Delta Cf_p \cdot D_p}{\overline{D^*} - \overline{Cf_p} \cdot D_p} + \frac{D_{p+1} \cdot \Delta Cf_{p+1} + D_p \cdot \Delta Cf_p}{Cf_{p+1} \cdot D_{p+1} - Cf_p \cdot D_p} \right]; \quad (2.19)$$

$$\Delta Cf_i = \Delta Cf_{il} + \frac{N_{sig} - N_l}{N_{(l+1)} - N_l} \left( \Delta Cf_{i(l+1)} + \Delta Cf_{il} \right); \quad (2.20)$$

$$\Delta Cf_{ij} = \frac{\Delta D_{ij}^*}{D_i}. \quad (2.21)$$

Зауважимо, що оскільки відповідно до формули (2.13) величини  $Cf_i$  залежать від кількості відліків аналізованого сигналу  $N_{sig}$ , тобто  $Cf_i = Cf_i(N_{sig})$ , то й оцінювана фрактальна розмірність  $D$  також залежить від  $N_{sig}$ . Її ж залежність від конкретного методу монофрактального аналізу міститься в величинах  $\overline{D_{ij}^*}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , що обчислюються з використанням модельних сигналів.

Якщо на практиці для побудови КФ використовувати тільки детерміновані сигнали, то у найпростішому випадку досить застосування одного модельного ФС. Але у разі використання модельних стохастичних ФС, де фрактальні властивості мають статистичний характер, необхідно обирати досить велику кількість модельних сигналів, а отримані результати усереднювати по ансамблю реалізацій, тобто

$$D_{ij}^* = \left\langle \overline{D_{ij}^*} \right\rangle \pm \left\langle \Delta D_{ij}^* \right\rangle,$$

де  $\langle \rangle$  – операція усереднення по ансамблю модельних стохастичних ФС. Те саме можна зробити й коли застосовується цілий набір моделей детермінованих ФС.

Таким чином, метод КФ рекомендовано використовувати для покращення характеристик будь-якого методу монофрактального аналізу, в якому здійснюється оцінка фрактальної розмірності досліджуваного сигналу або процесу.

### 2.4.2. Практичне застосування методу

Оскільки у межах даної дисертаційної роботи у якості методів монофрактального аналізу ми використовуємо методи УФА та ДинФА, а також класичний метод нормованого розмаху, то метод КФ доцільно застосувати, у першу чергу, для регуляризаційної  $D_R$ , клітинної  $D_B$ , варіаційної  $D_V$  та херстової  $D_H$  розмірностей.

Як було вказано вище, для кожної з цих розмірностей слід побудувати КФ, використовуючи набір модельних ФС із заздалегідь точно відомими значеннями фрактальної розмірності. У нашому випадку такою моделлю є ФНШС сигнал  $FUWB_{15}$ , який задається співвідношенням (2.10) та зовнішній вигляд якого у часовій області для різних значень  $D$  наведено на рис. 2.5.

Всі необхідні розрахунки як у даному розділі, так і протягом усієї роботи було проведено з використанням FracLab Toolbox (версія 2.2) для системи комп'ютерної математики (СКМ) MATLAB/SciLab, а також оригінального програмного забезпечення, створеного власноруч автором дисертації.

Нагадаємо, що вище йшлося про існування двох різних стратегій змінення величини кількості точок  $N_{sig}$ , якими задається аналізований сигнал. Отже, стратегія 1 полягає у зменшенні  $N_{sig}$  за рахунок децимації, стратегія 2 – за рахунок звуження ширини прямокутного вікна у часовій області. Тому побудова коригуючих функцій для різних фрактальних розмірностей проводилася окремо для кожної з названих стратегій.

Для стратегії 1 оцінки величин наведено для наступних фрактальних розмірностей: херстової  $D_H$  (табл. 2.8), регуляризаційної  $D_R$  (табл. 2.9), клітинної  $D_B$  (табл. 2.10) та варіаційної  $D_V$  (табл. 2.11). Сірим кольором у цих таблицях виділено рядки, де умови монотонності функції  $D^* = f(D, N_{sig})$  не виконуються. Варто зазначити, що величина  $N_{min}$  складає 64 для  $D_H$  і  $D_R$ , 512 для  $D_B$  та 256 для  $D_V$ .

Цей проміжний результат є певною відповіддю на питання, з якої мінімальної кількості відліків сигналу вже можна застосовувати той або інший метод монофрактального аналізу. Як зазначалося в оглядовому розділі 1, загального підходу до відповіді на це питання досі не існувало.

Крім того, слід відзначити загальну тенденцію зменшення величини оцінюваної фрактальної розмірності  $D^*$  зі збільшенням  $N$  за фіксованого значення  $D$ . За тих самих умов також існує тенденція зменшення величини відповідної відносної похибки  $\Delta D^* / D^*$ .

Аналогічні результати розрахунків з використанням стратегії 2 отримано для наступних фрактальних розмірностей: херстової  $D_H$  (табл. 2.12), регуляризаційної  $D_R$  (табл. 2.13), клітинної  $D_B$  (табл. 2.14) та варіаційної  $D_V$  (табл. 2.15).

Оскільки друга стратегія полягає у використанні прямокутного вікна у часовій області, порівняно з результатами стратегії 1 ми обмежилися максимальним значенням  $N = 8192$ , що відповідає реальним ситуаціям аналізу експериментальних даних. Слід зазначити, що в останньому випадку величина  $N_{\min}$  складає 32 для  $D_H$  і  $D_R$ , 256 для  $D_B$  та 64 для  $D_V$ . На відміну від результатів застосування стратегії 1, тут спостерігається тенденція збільшення величини оцінюваної розмірності  $D^*$  зі збільшенням  $N$  за фіксованого значення  $D$ . За тих самих умов також існує тенденція зменшення величини відповідної відносної похибки  $\Delta D^* / D^*$ .

Ґрунтуючись на отриманих вище результатах, для кожної з двох стратегій і кожної з чотирьох фрактальних розмірностей (регуляризаційної  $D_R$ , клітинної  $D_B$ , варіаційної  $D_V$  та херстової  $D_H$ ) на основі співвідношень (2.15) – (2.21) сконструйовано коригуючі функції та створено відповідне програмне забезпечення в середовищі СКМ MATLAB/SciLab. На відміну від того, що наведено у табл. 2.8 – 2.15, де наведено крок по фрактальній розмірності  $D$ , який дорівнює 0.1, для програмної реалізації коригуючих функцій використовувалися результати моделювання з кроком 0.01, що, на нашу думку, є цілком прийнятним для практичних цілей.

Таблиця 2.8. Оцінки херстової розмірності  $D_H$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 1).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.45 $\pm 0.05$	1.47 $\pm 0.05$	1.50 $\pm 0.05$	1.52 $\pm 0.05$	1.54 $\pm 0.05$	1.57 $\pm 0.06$	1.57 $\pm 0.06$	1.58 $\pm 0.06$	1.60 $\pm 0.06$	1.64 $\pm 0.06$
64	1.40 $\pm 0.03$	1.43 $\pm 0.03$	1.46 $\pm 0.03$	1.50 $\pm 0.03$	1.53 $\pm 0.03$	1.56 $\pm 0.03$	1.59 $\pm 0.03$	1.62 $\pm 0.03$	1.64 $\pm 0.03$	1.72 $\pm 0.02$
128	1.35 $\pm 0.02$	1.38 $\pm 0.02$	1.42 $\pm 0.02$	1.46 $\pm 0.02$	1.49 $\pm 0.02$	1.53 $\pm 0.02$	1.56 $\pm 0.02$	1.60 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.02$	1.78 $\pm 0.01$
256	1.34 $\pm 0.01$	1.38 $\pm 0.01$	1.42 $\pm 0.01$	1.46 $\pm 0.01$	1.50 $\pm 0.01$	1.55 $\pm 0.01$	1.59 $\pm 0.01$	1.64 $\pm 0.01$	1.66 $\pm 0.01$	1.81 $\pm 0.01$
512	1.33 $\pm 0.01$	1.37 $\pm 0.01$	1.42 $\pm 0.01$	1.47 $\pm 0.01$	1.52 $\pm 0.01$	1.58 $\pm 0.01$	1.63 $\pm 0.01$	1.68 $\pm 0.01$	1.71 $\pm 0.01$	1.82 $\pm 0.01$
1024	1.32 $\pm 0.01$	1.37 $\pm 0.01$	1.42 $\pm 0.01$	1.47 $\pm 0.01$	1.53 $\pm 0.01$	1.59 $\pm 0.01$	1.64 $\pm 0.01$	1.70 $\pm 0.01$	1.74 $\pm 0.01$	1.82 $\pm 0.01$
2048	1.315 $\pm 0.005$	1.362 $\pm 0.005$	1.416 $\pm 0.005$	1.473 $\pm 0.005$	1.533 $\pm 0.005$	1.595 $\pm 0.004$	1.655 $\pm 0.004$	1.713 $\pm 0.004$	1.769 $\pm 0.003$	1.861 $\pm 0.002$
4096	1.312 $\pm 0.004$	1.363 $\pm 0.003$	1.419 $\pm 0.003$	1.479 $\pm 0.003$	1.543 $\pm 0.003$	1.607 $\pm 0.003$	1.670 $\pm 0.003$	1.730 $\pm 0.003$	1.782 $\pm 0.002$	1.882 $\pm 0.002$
8192	1.309 $\pm 0.003$	1.362 $\pm 0.002$	1.421 $\pm 0.002$	1.484 $\pm 0.002$	1.551 $\pm 0.002$	1.620 $\pm 0.002$	1.688 $\pm 0.002$	1.753 $\pm 0.002$	1.807 $\pm 0.002$	1.842 $\pm 0.001$
16384	1.307 $\pm 0.002$	1.361 $\pm 0.002$	1.421 $\pm 0.002$	1.486 $\pm 0.002$	1.554 $\pm 0.002$	1.625 $\pm 0.002$	1.694 $\pm 0.001$	1.761 $\pm 0.001$	1.824 $\pm 0.001$	1.857 $\pm 0.06$
32768	1.305 $\pm 0.001$	1.361 $\pm 0.001$	1.422 $\pm 0.001$	1.488 $\pm 0.001$	1.558 $\pm 0.001$	1.629 $\pm 0.001$	1.700 $\pm 0.001$	1.767 $\pm 0.001$	1.831 $\pm 0.001$	1.882 $\pm 0.000$
65536	1.304 $\pm 0.001$	1.360 $\pm 0.001$	1.423 $\pm 0.001$	1.489 $\pm 0.001$	1.561 $\pm 0.001$	1.633 $\pm 0.001$	1.706 $\pm 0.001$	1.775 $\pm 0.001$	1.838 $\pm 0.001$	1.859 $\pm 0.000$
131072	1.303 $\pm 0.001$	1.360 $\pm 0.001$	1.423 $\pm 0.001$	1.490 $\pm 0.001$	1.563 $\pm 0.001$	1.636 $\pm 0.001$	1.710 $\pm 0.001$	1.785 $\pm 0.001$	1.848 $\pm 0.001$	1.881 $\pm 0.000$

Зазначимо, що найгірший результат у сенсі величин  $N_{\min}$  для обох стратегій показала клітинна розмірність  $D_B$ . Це було досить очікувано, оскільки при її обчисленні використовувався метод звичайних кліток – один з найстаріших методів фрактального аналізу (див. підрозділ 1.5).

Таблиця 2.9. Оцінки регуляризаційної розмірності  $D_R$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 1).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.46 $\pm 0.31$	1.62 $\pm 0.44$	1.56 $\pm 0.28$	1.62 $\pm 0.29$	1.68 $\pm 0.29$	1.75 $\pm 0.26$	1.82 $\pm 0.26$	1.90 $\pm 0.23$	2.00 $\pm 0.22$	2.45 $\pm 0.37$
64	1.45 $\pm 0.22$	1.50 $\pm 0.23$	1.56 $\pm 0.23$	1.62 $\pm 0.24$	1.68 $\pm 0.25$	1.75 $\pm 0.25$	1.83 $\pm 0.24$	1.91 $\pm 0.23$	2.00 $\pm 0.22$	2.14 $\pm 0.21$
128	1.41 $\pm 0.25$	1.47 $\pm 0.24$	1.53 $\pm 0.21$	1.59 $\pm 0.21$	1.66 $\pm 0.20$	1.73 $\pm 0.21$	1.81 $\pm 0.22$	1.89 $\pm 0.21$	1.98 $\pm 0.19$	2.35 $\pm 0.20$
256	1.37 $\pm 0.25$	1.42 $\pm 0.23$	1.49 $\pm 0.21$	1.55 $\pm 0.19$	1.63 $\pm 0.18$	1.71 $\pm 0.19$	1.79 $\pm 0.18$	1.87 $\pm 0.17$	1.96 $\pm 0.16$	2.37 $\pm 0.18$
512	1.33 $\pm 0.23$	1.39 $\pm 0.21$	1.45 $\pm 0.19$	1.52 $\pm 0.17$	1.60 $\pm 0.16$	1.68 $\pm 0.15$	1.77 $\pm 0.14$	1.86 $\pm 0.15$	1.95 $\pm 0.14$	2.35 $\pm 0.16$
1024	1.30 $\pm 0.21$	1.36 $\pm 0.18$	1.43 $\pm 0.16$	1.50 $\pm 0.15$	1.58 $\pm 0.14$	1.67 $\pm 0.13$	1.76 $\pm 0.12$	1.85 $\pm 0.12$	1.94 $\pm 0.12$	2.30 $\pm 0.10$
2048	1.27 $\pm 0.22$	1.34 $\pm 0.17$	1.41 $\pm 0.14$	1.49 $\pm 0.13$	1.57 $\pm 0.12$	1.66 $\pm 0.11$	1.75 $\pm 0.11$	1.84 $\pm 0.11$	1.93 $\pm 0.10$	2.25 $\pm 0.10$
4096	1.26 $\pm 0.22$	1.32 $\pm 0.18$	1.39 $\pm 0.14$	1.47 $\pm 0.12$	1.56 $\pm 0.11$	1.65 $\pm 0.10$	1.74 $\pm 0.09$	1.83 $\pm 0.10$	1.93 $\pm 0.09$	2.20 $\pm 0.10$
8192	1.24 $\pm 0.23$	1.31 $\pm 0.18$	1.38 $\pm 0.14$	1.46 $\pm 0.11$	1.55 $\pm 0.10$	1.64 $\pm 0.09$	1.73 $\pm 0.08$	1.83 $\pm 0.09$	1.92 $\pm 0.08$	2.17 $\pm 0.10$
16384	1.23 $\pm 0.25$	1.29 $\pm 0.18$	1.37 $\pm 0.14$	1.45 $\pm 0.11$	1.54 $\pm 0.09$	1.63 $\pm 0.08$	1.73 $\pm 0.08$	1.82 $\pm 0.08$	1.92 $\pm 0.07$	2.15 $\pm 0.10$
32768	1.21 $\pm 0.25$	1.28 $\pm 0.19$	1.36 $\pm 0.14$	1.45 $\pm 0.11$	1.54 $\pm 0.08$	1.63 $\pm 0.08$	1.72 $\pm 0.07$	1.82 $\pm 0.07$	1.92 $\pm 0.07$	2.13 $\pm 0.10$
65536	1.21 $\pm 0.24$	1.27 $\pm 0.19$	1.35 $\pm 0.15$	1.44 $\pm 0.11$	1.53 $\pm 0.08$	1.63 $\pm 0.07$	1.72 $\pm 0.07$	1.82 $\pm 0.07$	1.91 $\pm 0.06$	2.11 $\pm 0.07$
131072	1.20 $\pm 0.24$	1.27 $\pm 0.19$	1.35 $\pm 0.14$	1.44 $\pm 0.11$	1.53 $\pm 0.08$	1.62 $\pm 0.07$	1.72 $\pm 0.07$	1.81 $\pm 0.06$	1.91 $\pm 0.06$	2.09 $\pm 0.08$

Він має певну ваду, що полягає у так званому ефекті виснаження (див., наприклад, [172]), коли для дуже малих розмірів кліток залежність, що апроксимується лінійною регресією, яка дозволяє отримати величину  $D_B$ , починає істотно відрізнятися від лінійної. Останнє призводить до зменшення точності оцінювання  $D_B$ . Тому у нашій роботі ми не апроксимуємо останню третину точок,

Таблиця 2.10. Оцінки клітинної розмірності  $D_B$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 1).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	0.90 $\pm 0.11$	0.90 $\pm 0.11$	1.03 $\pm 0.06$	0.99 $\pm 0.09$	0.97 $\pm 0.05$	1.03 $\pm 0.03$	1.03 $\pm 0.16$	1.08 $\pm 0.16$	1.08 $\pm 0.16$	0.87 $\pm 0.18$
64	1.08 $\pm 0.09$	1.07 $\pm 0.10$	1.08 $\pm 0.04$	1.10 $\pm 0.08$	1.05 $\pm 0.11$	1.06 $\pm 0.11$	1.01 $\pm 0.10$	1.05 $\pm 0.09$	1.10 $\pm 0.10$	1.08 $\pm 0.09$
128	1.25 $\pm 0.06$	1.25 $\pm 0.06$	1.27 $\pm 0.04$	1.27 $\pm 0.05$	1.23 $\pm 0.10$	1.28 $\pm 0.08$	1.26 $\pm 0.06$	1.27 $\pm 0.08$	1.34 $\pm 0.05$	1.38 $\pm 0.08$
256	1.19 $\pm 0.08$	1.21 $\pm 0.06$	1.24 $\pm 0.06$	1.27 $\pm 0.05$	1.26 $\pm 0.06$	1.25 $\pm 0.08$	1.28 $\pm 0.07$	1.28 $\pm 0.10$	1.29 $\pm 0.09$	1.36 $\pm 0.12$
512	1.18 $\pm 0.06$	1.27 $\pm 0.05$	1.29 $\pm 0.05$	1.35 $\pm 0.04$	1.36 $\pm 0.03$	1.40 $\pm 0.03$	1.43 $\pm 0.04$	1.45 $\pm 0.05$	1.48 $\pm 0.06$	1.54 $\pm 0.06$
1024	1.18 $\pm 0.06$	1.28 $\pm 0.04$	1.30 $\pm 0.04$	1.41 $\pm 0.03$	1.42 $\pm 0.02$	1.45 $\pm 0.02$	1.53 $\pm 0.02$	1.56 $\pm 0.02$	1.64 $\pm 0.02$	1.71 $\pm 0.02$
2048	1.16 $\pm 0.07$	1.26 $\pm 0.04$	1.29 $\pm 0.05$	1.39 $\pm 0.03$	1.40 $\pm 0.03$	1.49 $\pm 0.02$	1.55 $\pm 0.02$	1.60 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.02$	1.72 $\pm 0.02$
4096	1.14 $\pm 0.02$	1.25 $\pm 0.05$	1.33 $\pm 0.03$	1.38 $\pm 0.03$	1.40 $\pm 0.03$	1.50 $\pm 0.02$	1.57 $\pm 0.02$	1.63 $\pm 0.02$	1.68 $\pm 0.02$	1.75 $\pm 0.02$
8192	1.13 $\pm 0.03$	1.22 $\pm 0.02$	1.32 $\pm 0.04$	1.37 $\pm 0.04$	1.40 $\pm 0.05$	1.50 $\pm 0.02$	1.56 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.01$	1.70 $\pm 0.01$	1.71 $\pm 0.01$
16384	1.13 $\pm 0.04$	1.22 $\pm 0.06$	1.31 $\pm 0.04$	1.35 $\pm 0.05$	1.44 $\pm 0.02$	1.52 $\pm 0.02$	1.59 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.01$	1.72 $\pm 0.02$	1.75 $\pm 0.02$
32768	1.12 $\pm 0.04$	1.21 $\pm 0.03$	1.29 $\pm 0.05$	1.39 $\pm 0.03$	1.45 $\pm 0.01$	1.53 $\pm 0.01$	1.60 $\pm 0.02$	1.67 $\pm 0.01$	1.73 $\pm 0.01$	1.77 $\pm 0.02$
65536	1.12 $\pm 0.04$	1.20 $\pm 0.03$	1.28 $\pm 0.05$	1.38 $\pm 0.03$	1.45 $\pm 0.01$	1.54 $\pm 0.01$	1.61 $\pm 0.02$	1.68 $\pm 0.01$	1.74 $\pm 0.02$	1.75 $\pm 0.02$
131072	1.12 $\pm 0.05$	1.19 $\pm 0.04$	1.28 $\pm 0.06$	1.37 $\pm 0.04$	1.45 $\pm 0.02$	1.54 $\pm 0.01$	1.62 $\pm 0.02$	1.69 $\pm 0.01$	1.76 $\pm 0.02$	1.77 $\pm 0.02$

де саме й проявляється цей ефект, що й продемонстровано на рис. 2.6, б, д, ж.

Корисним і цікавим здається також оцінка поведінки залежності  $D^* = f(D, N_{sig})$  з використанням методу КФ за фіксованого значення  $N_{sig}$ . Результати такої оцінки, отриманої для регуляризаційної  $D_R$ , клітинної  $D_B$ , варіаційної

Таблиця 2.11. Оцінки варіаційної розмірності  $D_V$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 1).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.98 $\pm 0.07$	1.98 $\pm 0.07$	1.98 $\pm 0.07$	1.98 $\pm 0.06$	1.99 $\pm 0.06$	1.99 $\pm 0.06$	1.98 $\pm 0.06$	1.98 $\pm 0.06$	1.98 $\pm 0.06$	1.97 $\pm 0.07$
64	1.95 $\pm 0.13$	1.95 $\pm 0.12$	1.95 $\pm 0.11$	1.96 $\pm 0.11$	1.96 $\pm 0.10$	1.97 $\pm 0.09$	1.97 $\pm 0.08$	1.97 $\pm 0.07$	1.97 $\pm 0.07$	1.97 $\pm 0.05$
128	1.86 $\pm 0.19$	1.86 $\pm 0.18$	1.87 $\pm 0.16$	1.88 $\pm 0.15$	1.88 $\pm 0.14$	1.89 $\pm 0.12$	1.90 $\pm 0.11$	1.91 $\pm 0.10$	1.93 $\pm 0.09$	1.92 $\pm 0.06$
256	1.72 $\pm 0.19$	1.73 $\pm 0.18$	1.75 $\pm 0.16$	1.77 $\pm 0.14$	1.78 $\pm 0.13$	1.80 $\pm 0.11$	1.82 $\pm 0.10$	1.84 $\pm 0.08$	1.85 $\pm 0.07$	1.90 $\pm 0.03$
512	1.55 $\pm 0.14$	1.57 $\pm 0.13$	1.60 $\pm 0.12$	1.64 $\pm 0.11$	1.67 $\pm 0.10$	1.71 $\pm 0.08$	1.75 $\pm 0.08$	1.79 $\pm 0.07$	1.81 $\pm 0.06$	1.89 $\pm 0.05$
1024	1.40 $\pm 0.09$	1.44 $\pm 0.08$	1.48 $\pm 0.08$	1.53 $\pm 0.08$	1.58 $\pm 0.06$	1.63 $\pm 0.06$	1.69 $\pm 0.05$	1.74 $\pm 0.05$	1.78 $\pm 0.05$	1.87 $\pm 0.05$
2048	1.30 $\pm 0.06$	1.35 $\pm 0.06$	1.41 $\pm 0.05$	1.47 $\pm 0.04$	1.53 $\pm 0.04$	1.60 $\pm 0.05$	1.66 $\pm 0.04$	1.72 $\pm 0.04$	1.77 $\pm 0.04$	1.86 $\pm 0.04$
4096	1.25 $\pm 0.04$	1.30 $\pm 0.04$	1.36 $\pm 0.04$	1.43 $\pm 0.04$	1.50 $\pm 0.04$	1.58 $\pm 0.04$	1.65 $\pm 0.04$	1.71 $\pm 0.04$	1.76 $\pm 0.04$	1.86 $\pm 0.04$
8192	1.20 $\pm 0.03$	1.26 $\pm 0.03$	1.33 $\pm 0.03$	1.41 $\pm 0.03$	1.48 $\pm 0.03$	1.56 $\pm 0.03$	1.63 $\pm 0.04$	1.70 $\pm 0.04$	1.76 $\pm 0.04$	1.85 $\pm 0.04$
16384	1.17 $\pm 0.02$	1.24 $\pm 0.02$	1.31 $\pm 0.02$	1.39 $\pm 0.03$	1.47 $\pm 0.03$	1.55 $\pm 0.03$	1.62 $\pm 0.04$	1.69 $\pm 0.04$	1.75 $\pm 0.04$	1.84 $\pm 0.04$
32768	1.16 $\pm 0.02$	1.22 $\pm 0.02$	1.30 $\pm 0.02$	1.38 $\pm 0.03$	1.46 $\pm 0.03$	1.54 $\pm 0.03$	1.62 $\pm 0.04$	1.69 $\pm 0.04$	1.75 $\pm 0.04$	1.84 $\pm 0.04$
65536	1.14 $\pm 0.01$	1.21 $\pm 0.02$	1.29 $\pm 0.02$	1.38 $\pm 0.02$	1.46 $\pm 0.02$	1.54 $\pm 0.03$	1.62 $\pm 0.04$	1.69 $\pm 0.04$	1.75 $\pm 0.04$	1.84 $\pm 0.04$
131072	1.13 $\pm 0.01$	1.21 $\pm 0.01$	1.29 $\pm 0.01$	1.38 $\pm 0.01$	1.46 $\pm 0.02$	1.54 $\pm 0.03$	1.62 $\pm 0.03$	1.69 $\pm 0.03$	1.75 $\pm 0.03$	1.84 $\pm 0.03$

$D_V$  та херстової  $D_H$  фрактальних розмірностей при  $N_{sig} = 1024$  наведено на рис. 2.11. Видно, що на відміну від ідеальної залежності ( $D^* = D$  – пряма 1) реальні залежності  $D_R^* = f(D_R)$  (крива 4),  $D_B^* = f(D_B)$  (крива 3),  $D_V^* = f(D_V)$  (крива 5) та  $D_H^* = f(D_H)$  (крива 2) є, як і зазначалося вище, нелінійними.

Таблиця 2.12. Оцінки херстової розмірності  $D_H$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 2).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.137 $\pm 0.016$	1.179 $\pm 0.018$	1.224 $\pm 0.023$	1.275 $\pm 0.027$	1.324 $\pm 0.032$	1.370 $\pm 0.035$	1.416 $\pm 0.040$	1.459 $\pm 0.045$	1.500 $\pm 0.048$	1.677 $\pm 0.039$
64	1.137 $\pm 0.009$	1.185 $\pm 0.011$	1.240 $\pm 0.015$	1.298 $\pm 0.018$	1.357 $\pm 0.021$	1.413 $\pm 0.023$	1.467 $\pm 0.026$	1.517 $\pm 0.029$	1.566 $\pm 0.030$	1.735 $\pm 0.023$
128	1.139 $\pm 0.006$	1.195 $\pm 0.008$	1.259 $\pm 0.010$	1.328 $\pm 0.012$	1.397 $\pm 0.014$	1.463 $\pm 0.016$	1.525 $\pm 0.017$	1.579 $\pm 0.018$	1.625 $\pm 0.019$	1.789 $\pm 0.014$
256	1.137 $\pm 0.004$	1.198 $\pm 0.005$	1.268 $\pm 0.007$	1.344 $\pm 0.008$	1.419 $\pm 0.009$	1.491 $\pm 0.010$	1.558 $\pm 0.011$	1.618 $\pm 0.012$	1.667 $\pm 0.012$	1.762 $\pm 0.008$
512	1.135 $\pm 0.003$	1.202 $\pm 0.004$	1.278 $\pm 0.005$	1.358 $\pm 0.006$	1.437 $\pm 0.006$	1.513 $\pm 0.007$	1.584 $\pm 0.007$	1.649 $\pm 0.007$	1.697 $\pm 0.007$	1.790 $\pm 0.005$
1024	1.140 $\pm 0.002$	1.211 $\pm 0.003$	1.291 $\pm 0.003$	1.375 $\pm 0.004$	1.457 $\pm 0.004$	1.538 $\pm 0.005$	1.613 $\pm 0.005$	1.681 $\pm 0.005$	1.736 $\pm 0.005$	1.835 $\pm 0.003$
2048	1.166 $\pm 0.002$	1.239 $\pm 0.002$	1.320 $\pm 0.003$	1.403 $\pm 0.003$	1.486 $\pm 0.003$	1.567 $\pm 0.003$	1.643 $\pm 0.004$	1.712 $\pm 0.004$	1.770 $\pm 0.004$	1.873 $\pm 0.003$
4096	1.262 $\pm 0.003$	1.326 $\pm 0.003$	1.396 $\pm 0.003$	1.469 $\pm 0.003$	1.543 $\pm 0.003$	1.617 $\pm 0.003$	1.685 $\pm 0.003$	1.746 $\pm 0.003$	1.798 $\pm 0.003$	1.866 $\pm 0.002$
8192	1.309 $\pm 0.003$	1.362 $\pm 0.002$	1.421 $\pm 0.002$	1.484 $\pm 0.002$	1.551 $\pm 0.002$	1.620 $\pm 0.002$	1.688 $\pm 0.002$	1.753 $\pm 0.002$	1.807 $\pm 0.002$	1.842 $\pm 0.001$

Саме тому на практиці враховувати такі залежності зручно з використанням засобів комп'ютерної техніки, що саме й здійснювалося в даній роботі. Приклади практичного застосування метода КФ до аналізу модельних ФС наведено у підрозділі 2.5.

## 2.5. Фрактальний аналіз фрактальних і мультифрактальних сигналів

Отже, вище було запропоновано три нові методи монофрактального аналізу – методи УФА, ДинФА та КФ. Тепер перевіримо практичні можливості цих методів з використанням модельних ФС. Через обмеженість загального об'єму роботи нижче наведено тільки ті результати моделювання, які, на думку автора, найбільш рельєфно відображають особливості конкретного методу, що застосовується.



Таблиця 2.13. Оцінки регуляризаційної розмірності  $D_R$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 2).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.04 $\pm 0.13$	1.05 $\pm 0.15$	1.08 $\pm 0.15$	1.20 $\pm 0.11$	1.40 $\pm 0.07$	1.59 $\pm 0.05$	1.73 $\pm 0.06$	1.86 $\pm 0.06$	2.01 $\pm 0.06$	2.40 $\pm 0.15$
64	1.04 $\pm 0.12$	1.05 $\pm 0.06$	1.13 $\pm 0.11$	1.29 $\pm 0.09$	1.47 $\pm 0.04$	1.65 $\pm 0.03$	1.79 $\pm 0.02$	1.90 $\pm 0.03$	2.01 $\pm 0.02$	2.40 $\pm 0.19$
128	1.04 $\pm 0.09$	1.09 $\pm 0.08$	1.21 $\pm 0.07$	1.36 $\pm 0.05$	1.52 $\pm 0.04$	1.67 $\pm 0.02$	1.79 $\pm 0.02$	1.91 $\pm 0.02$	2.00 $\pm 0.02$	2.43 $\pm 0.06$
256	1.08 $\pm 0.26$	1.17 $\pm 0.03$	1.28 $\pm 0.02$	1.41 $\pm 0.03$	1.54 $\pm 0.02$	1.67 $\pm 0.02$	1.78 $\pm 0.02$	1.89 $\pm 0.03$	1.99 $\pm 0.03$	2.36 $\pm 0.07$
512	1.15 $\pm 0.18$	1.24 $\pm 0.03$	1.34 $\pm 0.02$	1.44 $\pm 0.02$	1.55 $\pm 0.02$	1.66 $\pm 0.02$	1.77 $\pm 0.03$	1.87 $\pm 0.03$	1.97 $\pm 0.03$	2.32 $\pm 0.08$
1024	1.19 $\pm 0.18$	1.27 $\pm 0.09$	1.36 $\pm 0.07$	1.45 $\pm 0.05$	1.55 $\pm 0.04$	1.65 $\pm 0.03$	1.76 $\pm 0.03$	1.86 $\pm 0.03$	1.96 $\pm 0.03$	2.28 $\pm 0.11$
2048	1.20 $\pm 0.18$	1.28 $\pm 0.12$	1.36 $\pm 0.09$	1.45 $\pm 0.07$	1.55 $\pm 0.06$	1.64 $\pm 0.05$	1.74 $\pm 0.05$	1.85 $\pm 0.04$	1.94 $\pm 0.02$	2.25 $\pm 0.08$
4096	1.23 $\pm 0.22$	1.30 $\pm 0.17$	1.38 $\pm 0.13$	1.46 $\pm 0.10$	1.55 $\pm 0.08$	1.65 $\pm 0.07$	1.75 $\pm 0.06$	1.85 $\pm 0.05$	1.95 $\pm 0.04$	2.18 $\pm 0.11$
8192	1.24 $\pm 0.23$	1.31 $\pm 0.18$	1.38 $\pm 0.14$	1.46 $\pm 0.11$	1.55 $\pm 0.10$	1.64 $\pm 0.09$	1.73 $\pm 0.08$	1.83 $\pm 0.09$	1.92 $\pm 0.08$	2.17 $\pm 0.10$

### 2.5.1. Моделі фрактальних і мультифрактальних сигналів

Для проведення досліджень із фрактального аналізу ФС і МФС нижче використовуватимемо низку моделей детермінованих і стохастичних ФС і МФС. З огляду на обмежений об'єм дисертаційної роботи в тексті наведено лише деякі модельні сигнали з числа тих, що автором було проаналізовано під час досліджень. Вибір, як правило, робився на користь тих моделей, що здатні чітко підкреслити особливості саме тих методів фрактального аналізу, що тут розглядаються. Отже, в результаті обрано наступні моделі ФС і МФС.

Детерміновані ФС. До них належать такі моделі. Для зручності нижче будемо їх йменувати «модель 1», «модель 2» і т. ін.

Таблиця 2.14. Оцінки клітинної розмірності  $D_B$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 2).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	0.80 $\pm 0.04$	0.88 $\pm 0.03$	0.95 $\pm 0.02$	1.06 $\pm 0.09$	0.86 $\pm 0.08$	0.96 $\pm 0.03$	1.10 $\pm 0.02$	1.00 $\pm 0.07$	1.11 $\pm 0.04$	1.00 $\pm 0.08$
64	0.87 $\pm 0.02$	0.91 $\pm 0.02$	1.00 $\pm 0.01$	1.06 $\pm 0.07$	0.99 $\pm 0.07$	1.05 $\pm 0.03$	1.04 $\pm 0.02$	1.27 $\pm 0.03$	1.39 $\pm 0.10$	1.40 $\pm 0.04$
128	0.96 $\pm 0.01$	0.97 $\pm 0.01$	1.01 $\pm 0.01$	1.09 $\pm 0.05$	1.09 $\pm 0.02$	1.19 $\pm 0.01$	1.18 $\pm 0.01$	1.28 $\pm 0.06$	1.36 $\pm 0.07$	1.36 $\pm 0.11$
256	0.97 $\pm 0.01$	1.03 $\pm 0.03$	1.06 $\pm 0.02$	1.13 $\pm 0.01$	1.14 $\pm 0.03$	1.17 $\pm 0.05$	1.32 $\pm 0.02$	1.43 $\pm 0.03$	1.49 $\pm 0.03$	1.53 $\pm 0.06$
512	1.03 $\pm 0.01$	1.05 $\pm 0.02$	1.11 $\pm 0.02$	1.17 $\pm 0.01$	1.21 $\pm 0.04$	1.30 $\pm 0.01$	1.42 $\pm 0.02$	1.52 $\pm 0.01$	1.55 $\pm 0.01$	1.64 $\pm 0.02$
1024	1.08 $\pm 0.01$	1.12 $\pm 0.01$	1.21 $\pm 0.01$	1.24 $\pm 0.04$	1.30 $\pm 0.01$	1.40 $\pm 0.01$	1.47 $\pm 0.01$	1.51 $\pm 0.01$	1.56 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.03$
2048	1.10 $\pm 0.01$	1.17 $\pm 0.01$	1.22 $\pm 0.01$	1.26 $\pm 0.01$	1.31 $\pm 0.01$	1.39 $\pm 0.01$	1.47 $\pm 0.02$	1.55 $\pm 0.03$	1.60 $\pm 0.03$	1.70 $\pm 0.01$
4096	1.13 $\pm 0.01$	1.19 $\pm 0.01$	1.25 $\pm 0.03$	1.34 $\pm 0.03$	1.36 $\pm 0.02$	1.43 $\pm 0.01$	1.51 $\pm 0.03$	1.58 $\pm 0.02$	1.64 $\pm 0.03$	1.68 $\pm 0.02$
8192	1.13 $\pm 0.03$	1.22 $\pm 0.02$	1.32 $\pm 0.04$	1.37 $\pm 0.04$	1.40 $\pm 0.05$	1.50 $\pm 0.02$	1.56 $\pm 0.02$	1.65 $\pm 0.01$	1.70 $\pm 0.01$	1.71 $\pm 0.01$

1) *Модель 1.* Дана модель є моделлю косинусної функції Вейерштраса – Мандельброта з фрактальною розмірністю  $D = 1.5$ . Вона є найпростішою зі всіх, що розглядаються.

2) *Модель 2.* Модель зі стрибком фрактальної розмірності. Цей модельний сигнал створено на основі з двох послідовно розташованих у часовій області модельних ФНШС сигналів  $FUWB_{15}(t)$  однакової довжини, перший з яких має фрактальну розмірність  $D = 1.8$ , а другий –  $D = 1.2$ .

3) *Модель 3.* Модель із лінійно зменшуючоюся фрактальною розмірністю. Це модель ФС на основі узагальненої функції Вейерштраса, у якої фрактальна розмірність  $D(t)$  із часом зменшується за лінійним законом від 1.8 до 1.2.

Таблиця 2.15. Оцінки варіаційної розмірності  $D_V$  модельного детермінованого ФНШС сигналу  $FUWB_{15}$  для різної кількості відліків  $N$  (стратегія 2).

Кількість відліків, $N$	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
32	1.28 $\pm 0.06$	1.28 $\pm 0.05$	1.28 $\pm 0.05$	1.30 $\pm 0.04$	1.37 $\pm 0.03$	1.44 $\pm 0.02$	1.54 $\pm 0.02$	1.64 $\pm 0.02$	1.75 $\pm 0.02$	1.81 $\pm 0.03$
64	1.23 $\pm 0.06$	1.24 $\pm 0.06$	1.25 $\pm 0.06$	1.31 $\pm 0.03$	1.40 $\pm 0.02$	1.50 $\pm 0.02$	1.62 $\pm 0.02$	1.73 $\pm 0.02$	1.83 $\pm 0.04$	1.88 $\pm 0.03$
128	1.21 $\pm 0.06$	1.22 $\pm 0.05$	1.26 $\pm 0.03$	1.35 $\pm 0.02$	1.44 $\pm 0.02$	1.54 $\pm 0.01$	1.65 $\pm 0.02$	1.75 $\pm 0.04$	1.83 $\pm 0.05$	1.90 $\pm 0.03$
256	1.21 $\pm 0.06$	1.24 $\pm 0.04$	1.31 $\pm 0.02$	1.40 $\pm 0.02$	1.50 $\pm 0.02$	1.60 $\pm 0.03$	1.70 $\pm 0.04$	1.79 $\pm 0.06$	1.84 $\pm 0.06$	1.88 $\pm 0.04$
512	1.22 $\pm 0.03$	1.29 $\pm 0.03$	1.36 $\pm 0.03$	1.45 $\pm 0.03$	1.54 $\pm 0.04$	1.62 $\pm 0.05$	1.70 $\pm 0.05$	1.77 $\pm 0.06$	1.80 $\pm 0.05$	1.87 $\pm 0.05$
1024	1.25 $\pm 0.04$	1.31 $\pm 0.04$	1.39 $\pm 0.04$	1.46 $\pm 0.05$	1.54 $\pm 0.05$	1.62 $\pm 0.05$	1.68 $\pm 0.05$	1.75 $\pm 0.06$	1.79 $\pm 0.05$	1.87 $\pm 0.04$
2048	1.23 $\pm 0.04$	1.29 $\pm 0.04$	1.36 $\pm 0.04$	1.44 $\pm 0.04$	1.52 $\pm 0.04$	1.59 $\pm 0.05$	1.66 $\pm 0.04$	1.72 $\pm 0.05$	1.78 $\pm 0.05$	1.86 $\pm 0.04$
4096	1.22 $\pm 0.04$	1.28 $\pm 0.03$	1.35 $\pm 0.03$	1.42 $\pm 0.04$	1.50 $\pm 0.04$	1.57 $\pm 0.04$	1.65 $\pm 0.04$	1.71 $\pm 0.05$	1.77 $\pm 0.05$	1.85 $\pm 0.04$
8192	1.20 $\pm 0.03$	1.26 $\pm 0.03$	1.33 $\pm 0.03$	1.41 $\pm 0.03$	1.48 $\pm 0.03$	1.56 $\pm 0.03$	1.63 $\pm 0.04$	1.70 $\pm 0.04$	1.76 $\pm 0.04$	1.85 $\pm 0.04$

4) *Модель 4.* Модель з наявністю нефрактальної частини. Ця модель складена з двох частин, перша з яких є косинусною функцією Вейерштраса – Мандельброта з фрактальною розмірністю  $D = 1.5$ , а друга – НШС сигналом (показник широко-смуговості  $\mu = 0.2$ ), що не має фрактальних властивостей. Крім того, нам також потрібна модифікація моделі 4, яку назвемо моделлю 4а, де НШС сигнал замінено на  $s(t) = \sqrt{(t - 5) / 5}$ ,  $t \in [5, 10]$ . Зовнішній вигляд перелічених моделей у часовій області наведено нижче у відповідних форматах методів.

5) *Модель 5.* Складна модель (рис. 2.12, в), що утворена адитивною сумою двох ФС, які базуються на модельному ФНШС сигналі  $FUWB_{15}(t)$ . Перший з них

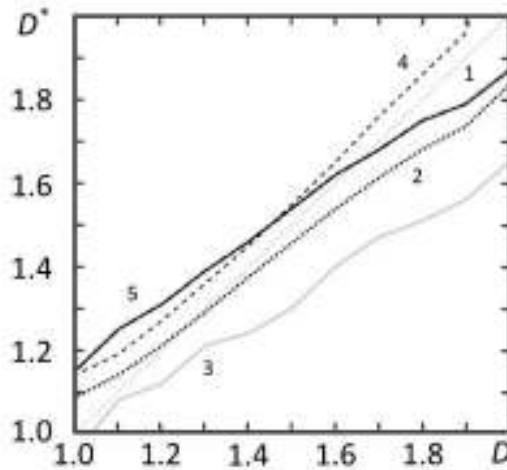


Рисунок 2.11 – Залежності  $D^* = f(D, N_{sig})$  між оцінюваною ( $D^*$ ) та ско-  
регованою методом КФ ( $D$ ) фрактальними розмірностями за фіксованого зна-  
чення кількості точок досліджуваного ФС ( $N_{sig} = 1024$ ) для: 1 – ідеального ви-  
падку, 2 – херстової розмірності  $D_H^* = f(D_H)$ , 3 – клітинної розмірності  
 $D_B^* = f(D_B)$ , 4 – регуляризаційної розмірності  $D_R^* = f(D_R)$ , 5 – варіаційної роз-  
мірності  $D_V^* = f(D_V)$ .

має фрактальну розмірність  $D = 1.8$ , а його амплітуда зменшується за лінійним  
законом (рис. 2.12, а). Другий має  $D = 1.2$ , натомість його амплітуда зростає також  
за лінійним законом.

Формально кажучи, лише модель 1 є моделлю монофрактального сигналу.  
Моделі 2 і 3 належать до мультифрактальних сигналів з точки зору глобальних ха-  
рактеристик, але залишаються монофрактальними у локальному сенсі. Натомість у  
розділі 3 вони також будуть розглядатися та порівнюватися із моделями, що є му-  
льтифрактальними як у глобальному, так і у локальному сенсах. Моделі 4 в 4а вза-  
галі є фрактальними тільки на першій своїй половині. Але вони вкрай потрібні, щоб  
побачити, як поведуться досліджувані методи фрактального аналізу, коли їх засто-  
совують до нефрактального сигналу. Модель 5 є типовою моделлю мультифракта-  
льного сигналу, оскільки є мультифрактальною як у глобальному, так і у локаль-  
ному сенсі. Вона є містком до результатів досліджень, викладених у Розділі 3.

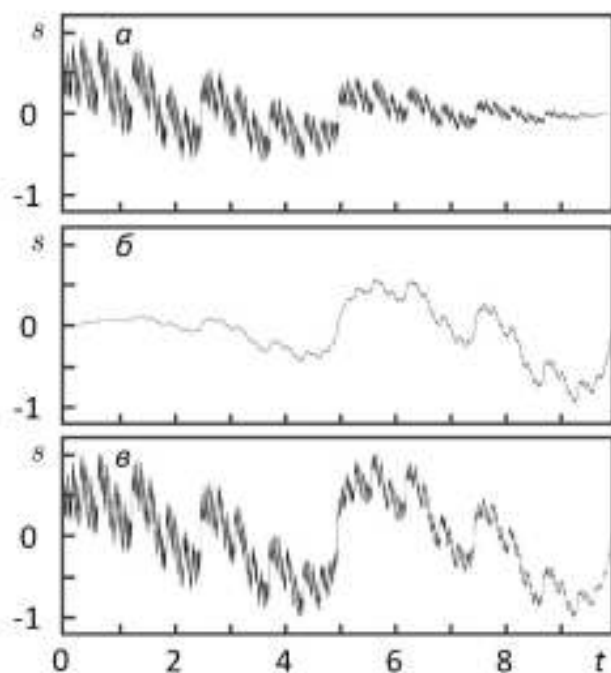


Рисунок 2.12 – Модельний детермінований ФС (модель 5), створений як адитивна сума двох ФНШС сигналів (модель  $FUWB_{15}(t)$ ) з різними значеннями фрактальної розмірності  $D$ : а – ФНШС сигнал з  $D = 1.8$  та лінійно зменшуючоюся у часі амплітудою, б – ФНШС сигнал з  $D = 1.2$  та лінійно збільшуючоюся у часі амплітудою, в – власне сама модель 5.

Стохастичні ФС і МФС. Цей клас ФС і МФС моделюватиметься з використанням наступних моделей, приклади зовнішнього вигляду яких у часовій області наведено на рис. 2.13.

1) *Модель 6.* Модель на основі узагальненої косинусної функції Вейерштраса – Мандельброта  $MW_D(t)$  [173]. Продемонстровано дві реалізації з  $D = 1.2$  (рис. 2.13, а) та  $D = 1.8$  (рис. 2.13, б).

2) *Модель 7.* Моделі УБР [122] Для прикладу наведено дві реалізації моделі УБР з  $D = 1.2$  (рис. 2.13, в) та  $D = 1.8$  (рис. 2.13, г).

3) *Модель 8.* Моделі на основі фрактальних шумів [122, 123]. На рис. 2.13 можна побачити приклади таких реалізацій з  $D = 1.2$  (рис. 2.13, д) та  $D = 1.8$  (рис. 2.13, е).

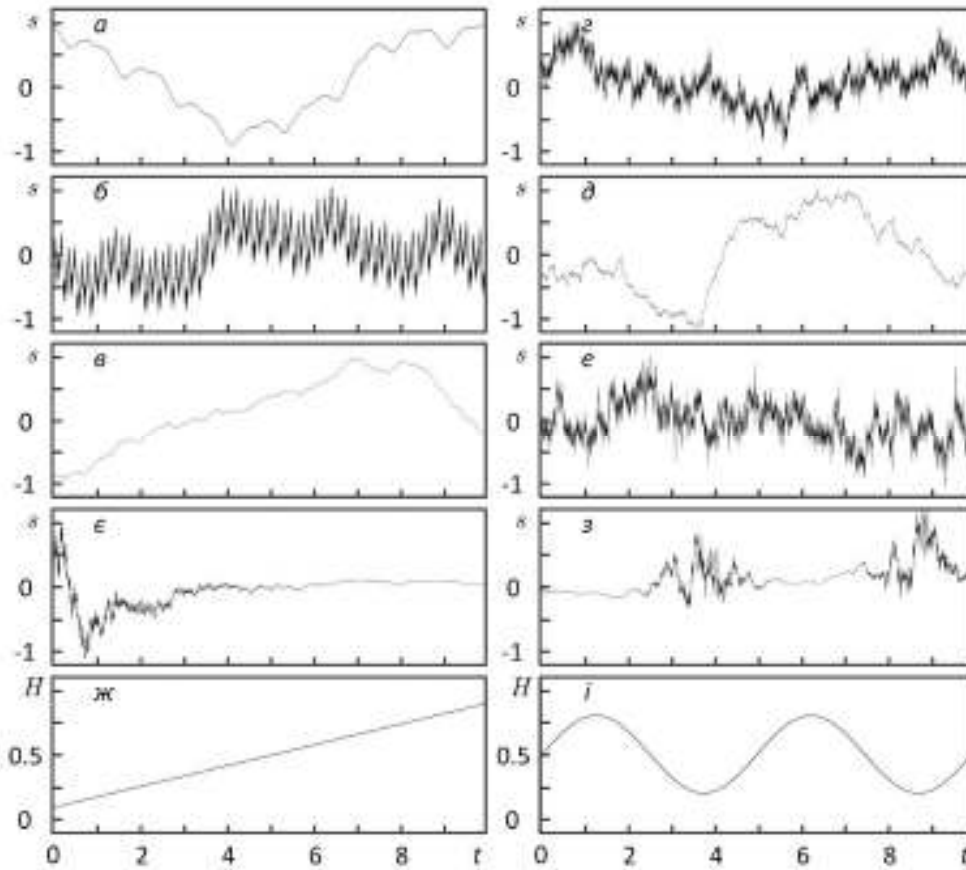


Рисунок 2.13 – Модельні стохастичні ФС: а – модель 6, фрактальна розмірність  $D = 1.2$ , б – модель 6,  $D = 1.8$ , в – модель 7,  $D = 1.2$ , г – модель 7,  $D = 1.8$ , д – модель 8,  $D = 1.2$ , е – модель 8,  $D = 1.8$ , є – модель 9, ж – показник Гельдера моделі 9, з – модель 10, і – показник Гельдера моделі 10.

4) *Модель 9.* Модель на основі мультифрактального броунівського руху (МБР) [122, 123]. Показник Гельдера даної моделі (рис. 2.13, є) змінюється у часі за законом (рис. 2.13, ж):  $H(t) = 0.1 + 0.8t$ ,  $t \in [0,1]$ .

5) *Модель 10.* Також модель на основі МБР (рис. 2.13, з), але показник Гельдера змінюється за законом (рис. 2.13, і):  $H(t) = 0.5 + 0.3 \sin(4\pi t)$ ,  $t \in [0,1]$ .

Зауважимо, що сама форма реалізацій стохастичних ФС у часовій області має виключно випадковий характер, тому на рис. 2.13 наведено саме окремі приклади.

Здебільшого даний клас моделей використовується для перевірки ефективності методів фрактального аналізу, які на першому етапі їх створення застосовувалися для дослідження тільки детермінованих сигналів. Загальна кількість відліків кожного модельного сигналу дорівнює  $N = 8192$ .

### 2.5.2. Застосування методу ДинФА

Можливості методу ДинФА продемонструємо з використанням моделей ФС, про які йшлося вище у пункті 2.5.1. У методі ДинФА будемо застосовувати херстову розмірність  $D_H$ . При проведенні АВП в усіх випадках братиметься комплексний вейвлет Морле (стор 1-1.5).

Розпочнемо з моделі 1, що є моделлю детермінованого ФС з одним-єдиним значенням фрактальної розмірності  $D$ . На рис. 2.14, а, є наведено таку модель ФС у часовій області, коли значення її фрактальної розмірності складає  $D = 1.5$ . Добре помітно, що її модуль СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.14, ж), аргумент СФ АВП  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.14, з) та скелетон  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.14, и) мають чітку однорідну уздовж часової осі фрактальну структуру.

Певне порушення однорідності на відповідних часо-періодних площинах спостерігається лише біля правого їх краю. Але до фрактальних властивостей ФС це не має жодного відношення, оскільки порушення виникають у межах «конусу впливу» крайових ефектів, коли аналізуючий вейвлет виходить за межі аналізованого сигналу (див., наприклад, [105]). До речі, саме з аналогічної причини на рис. 2.14, б на часо-періодній площині функції  $D_H(t, T)$  праворуч і ліворуч розташовуються зони білого кольору. Оскільки значення фрактальної розмірності, що обчислюється в середині прямокутного вікна заданої ширини, асоціюється на часовій осі з положенням середини вікна, немає сенсу розглядати результати, отримані тоді, коли вікно вже вийшло за межі самого сигналу.

На рис. 2.14, б також видно, що функція  $D_H(t, T)$  для різних фіксованих значень масштабів  $T$  дещо флюктує, хоча в ідеальному випадкові вона має залишатися сталою, тобто дорівнювати  $D_H(t, T) = D = 1.5$ . Більш докладно це показано на рис. 2.14, в – е, де наведено відповідні графіки  $D_H(t, T_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  для чотирьох фіксованих значень безрозмірної змінної:  $T_1 = 0.004$  (рис. 2.14, е),  $T_2 = 0.837$  (рис. 2.14, д),  $T_3 = 1.671$  (рис. 2.14, г) і  $T_4 = 2.500$  (рис. 2.14, в). Осциляції, що

присутні на цих графіках, скоріш за все, пов'язані з внутрішньою структурою самих модельних сигналів, оскільки за часів їх створення оцінювалася лише фрактальна розмірність всього сигналу в цілому. Задля часткового позбавлення від цих осциляцій на фрактограмах (нагадаємо, що так часто називають часові залежності фрактальних розмірностей) тут і далі використовується усереднення з використанням методу ковзаючого середнього. Так, для сигналу, що має кількість відліків  $N = 8192$ , фрактограма усереднюється по 100 точках. Також спостерігається тенденція, що різниця між теоретичним значенням фрактальної розмірності  $D$  та оцінюваними величинами  $D_H(t, T)$  зменшується із зростанням ширини вікна  $T$ . Наостанок зазначимо, що значення херстової розмірності, обчисленої за усім сигналом, складає  $D_H = 1.446 \pm 0.002$ .

Тепер перейдемо до моделі 2. Як зазначено вище, вона створена на основі двох послідовно розташованих у часовій області модельних ФНШС сигналів  $FUWB_{15}(t)$  однакової довжини, перший з яких має фрактальну розмірність  $D = 1.8$ , а другий –  $D = 1.2$  (рис. 2.15, а, є). У локальному сенсі такий сигнал є монофрактальним (подібно до моделі 1), а тому цікаво побачити, наскільки успішно метод ДинФА відобразить стрибок фрактальної розмірності.

На рис. 2.15, ж – и, де розташовуються модуль СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.15, ж), аргумент СФ АВП  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.15, з) та скелетон  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.15, и), на часо-періодній площині у межах кожної половини спостерігаються дві різні однорідні структури, кожна з яких нагадує аналогічний результат, отриманий для моделі 1. Це й не є дивним, оскільки кожна з половин моделі 2 дійсно є монофрактальним ФС. Найцікавішими, на нашу думку, тут є тонкі структури, що відповідають стрибковій фрактальній розмірності. Як і очікувалося, їх ширина зростає із збільшенням  $T$ .

Функція  $D_H(t, T)$  (рис. 2.15, б) також має три характерні зони, що відповідають кожній з монофрактальних половин сигналу, а також зоні стрибка фрактальної



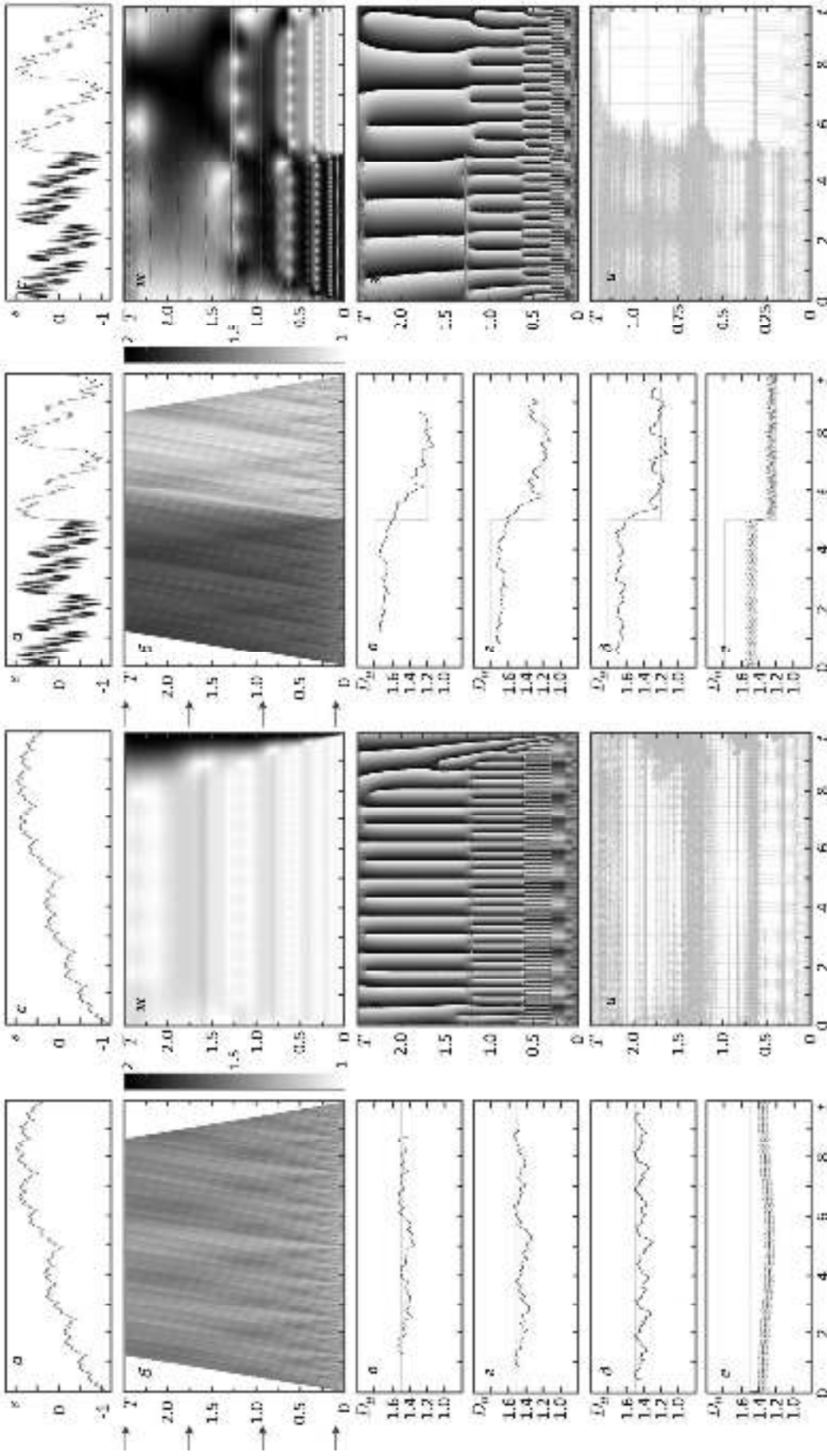


Рисунок 2.14 – Результати аналізу модельного ФС (модель 1) з використанням метода ДинФА: а,  $\epsilon$  – сигнал у часовій області, б – характеристична розмірність  $D_\beta(t, T)$ , в, г, д, е – характеристична розмірність  $D_\beta(t) = D_\beta(t, T)$  за фіксованих значень  $T$ , позначено стрілками вгору; на панелі б): характеристична СФ АВП (війдеє стов 1.1.5); ж –  $|\arg W(t, T)|$ , з –  $\arg W(t, T)$ , и – скелетон  $\arg W(t, T)$ .

Рисунок 2.15 – Результати аналізу модельного ФС (модель 2) з використанням метода ДинФА: а,  $\epsilon$  – сигнал у часовій області, б – характеристична розмірність  $D_\beta(t, T)$ , в, г, д, е – характеристична розмірність  $D_\beta(t) = D_\beta(t, T)$  за фіксованих значень  $T$ , позначено стрілками вгору; на панелі б): характеристична СФ АВП (війдеє стов 1.1.5); ж –  $|\arg W(t, T)|$ , з –  $\arg W(t, T)$ , и – скелетон  $\arg W(t, T)$ .

розмірності. На рис. 2.15, в – е, де зображено графіки  $D_H(t, T_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  для  $T_1 = 0.004$  (рис. 2.15, е),  $T_2 = 0.837$  (рис. 2.15, д),  $T_3 = 1.671$  (рис. 2.15, г) і  $T_4 = 2.500$  (рис. 2.15, в), а пунктиром наведено ідеальний (теоретичний) хід часової залежності фрактальної розмірності  $D(t)$  модельного сигналу, видно, що херстова розмірність  $D_H(t, T)$  досить добре демонструє різницю між обома половинами сигналу. Між тим, ширина зони стрибка у часовій області, яка в ідеальному випадку дорівнює нулю, збільшується із зростанням величини  $T$ . Натомість величина херстової розмірності, оціненої за усім сигналом одразу, складає  $D_H = 1.690 \pm 0.002$ , окремо за першою половиною –  $D_H = 1.730 \pm 0.002$  ( $D = 1.8$ ), окремо за другою половиною –  $D_H = 1.363 \pm 0.003$  ( $D = 1.2$ ).

Перейдемо до моделі 3, у якої фрактальна розмірність  $D(t)$  із часом зменшується за лінійним законом від 1.8 до 1.2 (рис. 2.16, а, є). Використання саме такої моделі ФС зумовлено тим, що метод ДинФА створювався саме для дослідження сигналів з нестационарними фрактальними властивостями. Натомість якщо сигнал є монофрактальним і стаціонарним у цьому сенсі, то оцінювання його фрактальної розмірності  $D(t, T)$  у ковзаючому у часовій області  $t$  вікні зі змінною шириною  $T$  просто позбавлено жодного сенсу.

Отже, на СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.16, ж) видно, як із зменшенням фрактальної розмірності  $D$  (чому тут відповідає зростання безрозмірного часу  $t$ ) основна енергія сигналу перекачується у компоненти з більшими значеннями безрозмірного періоду  $T$  (тобто у більш низькочастотні компоненти).

Останнє є цілком логічним, оскільки чим меншим є величина  $D$ , тим більш гладким є сигнал. На площині аргументу СФ АВП  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.16, з) ніякої залежності від величини фрактальної розмірності  $D$  не спостерігається, а на її скелетоні (рис. 2.16, и) із часом дещо зменшується його засміченість артефактами.

Функція  $D_H(t, T)$  (рис. 2.16, б) добре відображає змінення величини фрактальної розмірності. На рис. 2.16, в – е, де містяться графіки  $D_H(t, T_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$  для

$T_1 = 0.004$  (рис. 2.16, е),  $T_2 = 0.837$  (рис. 2.16, д),  $T_3 = 1.671$  (рис. 2.16, г) і  $T_4 = 2.500$  (рис. 2.16, в), а пунктиром наведено ідеальний (теоретичний) хід часової залежності фрактальної розмірності  $D(t)$  модельного сигналу, добре помітно, що херстова розмірність  $D_H(t, T)$  за тенденцією досить добре узгоджується з теоретичною прямою, хоча й осцилює навколо або біля неї. До того ж зберігається виявлена раніше тенденція зменшення різниці між оцінюваними значеннями херстової розмірності  $D_H(t, T)$  та її теоретичним ходом  $D(t)$  зі збільшенням ширини вікна  $T$ . Хоча слід зазначити, що дещо турбує різниця на рис. 2.16, д. Але про усунення цього недоліку йтиметься нижче у пункті 2.5.4.

Цікаво також відзначити, що херстової розмірності, оціненої за усім сигналом одразу, складає  $D_H = 1.599 \pm 0.002$ , окремо за першою половиною –  $D_H = 1.645 \pm 0.002$  ( $D = 1.8 - 1.5$ ), окремо за другою половиною –  $D_H = 1.364 \pm 0.002$  ( $D = 1.5 - 1.2$ ).

Тепер звернемося до результатів аналізу моделі 4. Ця модель є дуже цікавою, тому що містить у власному складі як фрактальну, так і нефрактальну половини. Останнє, на нашу думку, є вкрай важливим, оскільки у літературних джерелах майже не обговорюється питання того, що буде, якщо формально застосувати той чи інший метод фрактального аналізу до точно нефрактального сигналу. Але інколи зустрічаються рекомендації проводити попередню обробку аналізованого сигналу (див., наприклад, [172]). Під час цієї обробки рекомендують усувати низько-частотні тренди (наприклад, із використанням ковзаючого середнього або поліноміальної апроксимації) та вузькосмугові гармонічні тренди (наприклад, із застосуванням фур'є- або вейвлет-фільтрації). Вважається, що певне часткове псування часо-частотного розподілу аналізованого сигналу не є критичним саме через його фрактальність.

Тим не менш, як показують результати моделювання, вплив вказаних двох негативних факторів суттєво залежить від конкретної обраної фрактальної розмірності та методу її оцінювання. Тут ми використовуємо херстову розмірність, а тому

отримані результати моделювання не слід навмання поширювати на інші фрактальні розмірності й інші методи фрактального аналізу.

Повернемось власне до результатів аналізу моделі 4. На СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.17, ж), аргументі СФ АВП  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.17, з) та скелетоні  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.17, и) чітко видно три області: перша (ліворуч) відповідає ФС ( $D = 1.8$ ) і має чітко виражену фрактальну структуру на всіх трьох площинах, друга (праворуч) є типовою для нефрактального УКНШС сигналу (його показник широкосмуговості складає приблизно  $\mu \approx 0.2$ , а фрактальна розмірність співпадає з топологічною –  $D = 1.0$ ), третя (посередині) відображає зону різкого переходу від ФС до УКНШС сигналу.

Структура функції  $D_H(t, T)$  (рис. 2.17, б) потребує особливої уваги. Ліва її частина дуже схожа з аналогічною лівою частиною для моделі 2 (рис. 2.15, б). Так і мало бути, оскільки ліві половини моделей 2 і 4 є тотожними. Значно цікавіше і неочікуваніше виглядає права частина  $D_H(t, T)$  (рис. 2.17, б). Із точки зору теорії поза межами конусу впливу лівої (фрактальної) частина моделі 4, коли у вікно потрапляє лише УКНШС сигнал, херстова розмірність повинна дорівнювати 1. Так воно й є, але тільки для  $T \leq 0.5$ , коли до вікна, в якому обчислюється херстова розмірність, потрапляє не більше двох пелюстків (або одного періоду) гармонічної функції. Якісно це продемонстровано на рис. 2.17, е. Далі в діапазоні  $0.5 \leq T \leq 1$  оцінка херстової розмірності починає трошки зростати ( $D_H \sim 1.05$ , 5% похибки). До речі, на часо-періодній площині СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.17, ж) приблизно в цьому діапазоні  $T$  розташовано основну частину енергії УКНШС сигналу. При  $T > 1$ , коли до вікна потрапляє вже більше двох періодів гармонічної функції, похибка істотно зростає. Так, для  $T \approx 1.7$  (приблизно 3.5 періода) вона складає приблизно 25 % ( $D_H \sim 1.25$ ), а для  $T \approx 2.5$  (5 періодів) вона сягає вже 40 % ( $D_H \sim 1.4$ ). Додамо, що величина херстової розмірності, оціненої за усім сигналом, складає  $D_H = 1.703 \pm 0.002$ , окремо за першою половиною –  $D_H = 1.730 \pm 0.002$

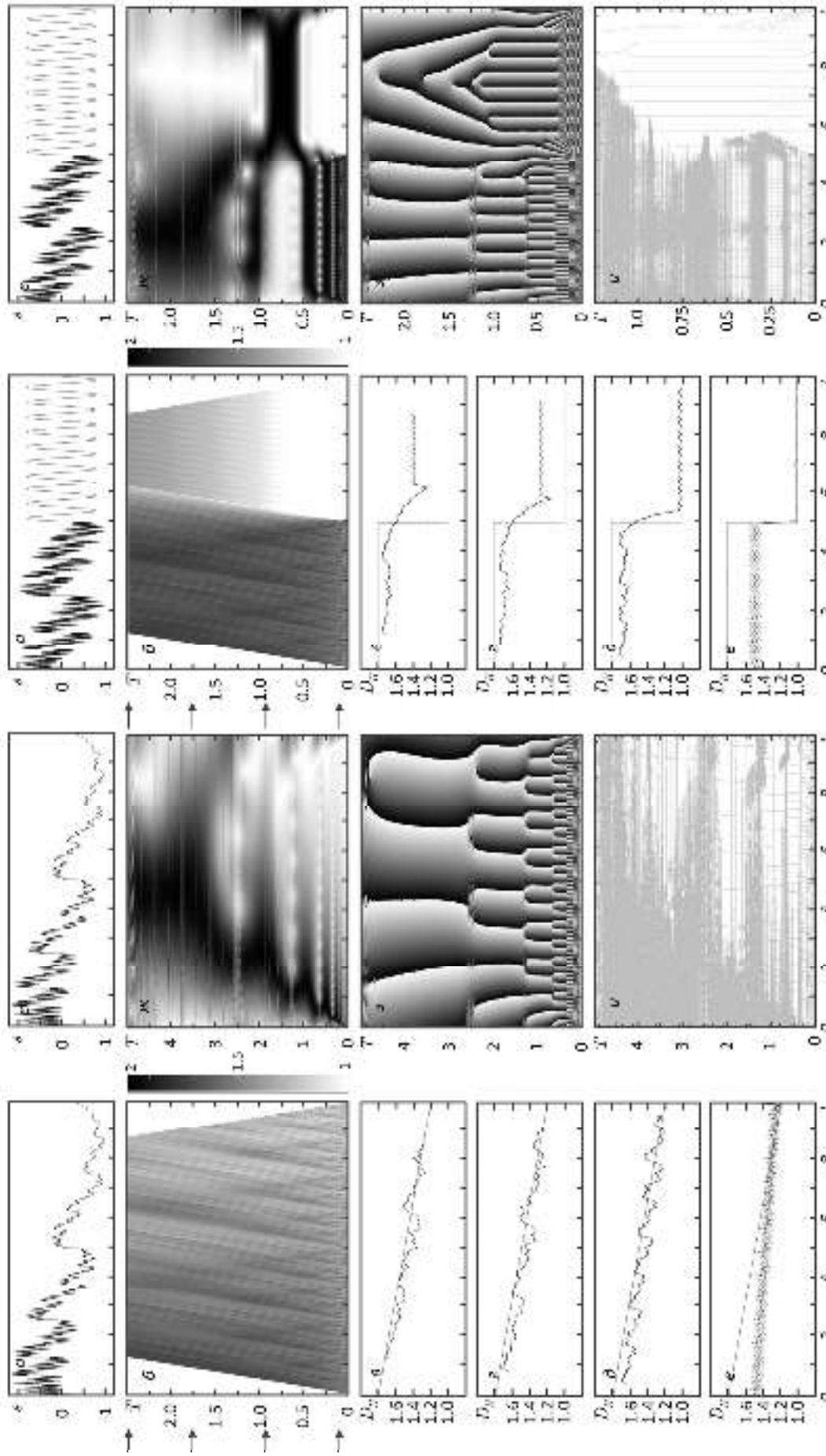


Рисунок 2.16 – Результати аналізу модельного ФС (модель 3) з використанням методу ДифФА: а, с – сигнал у часовій області, б – херстова розмірність  $D_{12}(t, T)$ , в, г, д, е – херстова розмірність  $D_{21}(t, T)$  та фіксованих значень  $T_1$  (показано стрілками ліворуч на панелі б); характеристики СФ АВП (виймає стов 1.1.5); ж –  $|\dot{W}(t, T)|$ , з –  $\arg \dot{W}(t, T)$ , и – скелетон  $\arg \dot{W}(t, T)$ .

Рисунок 2.17 – Результати аналізу модельного ФС (модель 4) з використанням методу ДифФА: а, с – сигнал у часовій області, б – херстова розмірність  $D_{12}(t, T)$ , в, г, д, е – херстова розмірність  $D_{21}(t, T)$  та фіксованих значень  $T_1$  (показано стрілками ліворуч на панелі б); характеристики СФ АВП (виймає стов 1.1.5); ж –  $|\dot{W}(t, T)|$ , з –  $\arg \dot{W}(t, T)$ , и – скелетон  $\arg \dot{W}(t, T)$ .

( $D = 1.8$ ), окремо за другою половиною –  $D_H = 1.607 \pm 0.006$  ( $D = 1.0$ ). Останній результат обчислено для  $T = 5$  (10 періодів), похибка дорівнює біля 60 %.

Таким чином, на цьому прикладі стає зрозумілою наполеглива рекомендація фахівців прибирати гармонічні тренди. Додамо, що наявність таких трендів може істотно вплинути на результат, якщо у вікно обчислення розмірності потрапить більш, ніж один період гармонічної функції. У протилежному випадку така функція не є періодичною, а тому істотного впливу на точність результату не створює.

На останок розглянемо модель 5, яка насправді є вже мультифрактальною як у глобальному, так і у локальному сенсі. Причина її появи полягає у наступному.

У практичних задачах часто буває необхідно оцінити фрактальну розмірність ФС, що перебуває на фоні іншого ФС, який має зовсім інше значення фрактальної розмірності. Це може бути корисним, наприклад, під час розв'язання задачі виявлення ФС на фоні фрактальної завади. Нажаль, чітко сформульованих загальних рекомендацій щодо цього питання відшукати у літературних джерелах досі не вдалося, хоча окремі спроби провести відповідне моделювання робилися й є відомими (див., наприклад, [174]). Причиною цього, на нашу думку, може бути те, що формально суміш двох ФС або навіть ФС і нефрактального сигналу (сюди повністю підходять як низькочастотний та і гармонічний тренди, про які була розмова вище) вже є мультифрактальним (як глобально, так і локально) сигналом та до неї логічно було б застосовувати відповідні методи мультифрактального аналізу. Але прямої заборони застосовувати методи монофрактального аналізу наразі не існує. Більш того, починаючи аналіз реальних експериментальних даних, у переважній більшості випадків дослідник може навіть не підозрювати, з чим саме він матиме справу. Тому спроба застосувати метод УФА, що є методом монофрактального аналізу, до моделі 5 є доцільною та цікавою.

Виходячи з наявних результатів, можна стверджувати, що фрактальна розмірність суміші двох ФС з різними значеннями фрактальних розмірностей залежить не тільки від цих значень, а й від співвідношення енергій цих сигналів, що потрапляють у вікно обчислення фрактальної розмірності. Якщо вікно є дуже вузьким

(тобто, щоб амплітуди ФС в ньому мало змінювалися), то замість залежності енергій можна розглядати відношення квадратів амплітуд цих ФС. Саме тому й було створено модель 5 (рис. 2.12, в), в якій амплітуда сигналу з більшою розмірністю ( $D = 1.8$ ) зменшується у часі за лінійним законом (рис. 2.12, а), а амплітуда сигналу з меншою розмірністю ( $D = 1.2$ ) збільшується за тим самим законом (рис. 2.12, б).

Отже, звернемося до результатів застосування методу ДинФА до моделі 5. Структура СФ АВП  $|\dot{W}f(t, T)|$  (рис. 2.18, ж) більш нагадує аналогічну для моделі 3 (рис. 2.16, ж), ніж для моделі 2 (рис. 2.15, ж). Натомість аргумент СФ АВП  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.18, з) мало відрізняється від аналогічного для моделі 2 (рис. 2.15, з), а скелетон  $\arg \dot{W}f(t, T)$  (рис. 2.18, и) нагадує аналогічний скелетон тієї ж моделі (рис. 2.15, и).

Структура функції  $D_H(t, T)$  (рис. 2.18, б) зовні схожа на аналогічну для моделі 3 (рис. 2.16, б), теж має тенденцію до зменшення  $D_H(t, T)$  зі збільшенням  $t$  за фіксованого значення  $T$ . Відмінність же між цими двома функціями виявляється при порівнянні рис. 2.18, в – е та рис. 2.16, в – е. Якщо для моделі 3 функції  $D_H(t)$  осцилюють навколо прямої, то для моделі 5 пряму замінює деяка нелінійна функція, що зменшується приблизно за ступеневим законом у останній чверті сигналу. До речі, така саме ситуація спостерігається і для сигналу, аналогічного моделі 3, де фрактальна розмірність  $D(t)$  змінюється у часі у відповідності до згаданої нелінійної функції. Нажаль, розрізнити ці два випадки з використанням лише методу ДинФА неможливо.

Останній приклад є демонстрацією того, чому під час вивчення експериментальних даних варто не тільки використовувати різні фрактальні розмірності (наприклад, у межах методу УФА), а й проводити мультифрактальний аналіз паралельно з монофрактальним. Про переваги такого підходу йтиметься у розділі 3.

Наприкінці аналізу моделі 5 зазначимо, що величина херстової розмірності, оціненої за усім сигналом одразу, складає  $D_H = 1.605 \pm 0.002$ , окремо за першою

половиною –  $D_H = 1.704 \pm 0.002$ , окремо за другою половиною –  $D_H = 1.501 \pm 0.002$ .

### 2.5.3. Застосування методу КФ

Доброю ілюстрацією ефективності метода КФ є його застосування у методі ДинФА, коли у якості обчислюваної фрактальної розмірності використовується херстова розмірність  $D_H$ . Тут використовуємо ті самі моделі, що й в попередньому пункті. Результати аналізу зручно представляти в наступному форматі, який розглянемо на прикладі моделі 1 (рис. 2.19, а, є).

У лівому стовпчику під графіком самого сигналу у часовій області (рис. 2.19, а) розташовано традиційну для метода ДинФА функцію  $D_H(t, T)$  (рис. 2.19, б), обчислювану з використанням методу нормованого розмаху у прямокутному спектральному вікні шириною  $T$ , центр якого розташовано на часовій осі в точці з координатою  $t$ . Геометричним образом функції  $D_H(t, T)$  є поверхня, яку зображено з використанням кольорової схеми, наведеної на рис. 2.19, б праворуч від графіка цієї функції.

Нижче містяться чотири графіки залежностей  $D_H(t, T_1)$  (рис. 2.19, є),  $D_H(t, T_2)$  (рис. 2.19, д),  $D_H(t, T_3)$  (рис. 2.19, г) та  $D_H(t, T_4)$  (рис. 2.19, в) для фіксованих значень ширини вікна  $T_1 = 0.004$ ,  $T_2 = 0.833$ ,  $T_3 = 1.667$  і  $T_4 = 2.500$ , які також позначено стрілками на рис. 2.19, б (ліворуч від графіка двовимірної функції  $D_H(t, T)$ ). Для порівняння на рис. 2.19, в – є, з – і також штрихованою лінією продемонстровано ідеальну часову залежність  $D(t)$  фрактальної розмірності модельного ФС. У правому стовпчику під графіком модельного сигналу у часовій області (рис. 2.19, є) перебуває скорегована з використанням методу КФ функція  $D_H(t, T)$  (рис. 2.19, ж). Нижче її розташовано відповідні скореговані функції  $D_H(t, T_1)$  (рис. 2.19, і),  $D_H(t, T_2)$  (рис. 2.19, і),  $D_H(t, T_3)$  (рис. 2.19, и) та  $D_H(t, T_4)$  (рис. 2.19, з), що відповідають тим самим значенням ширини вікна, що й у лівому стовпчику.



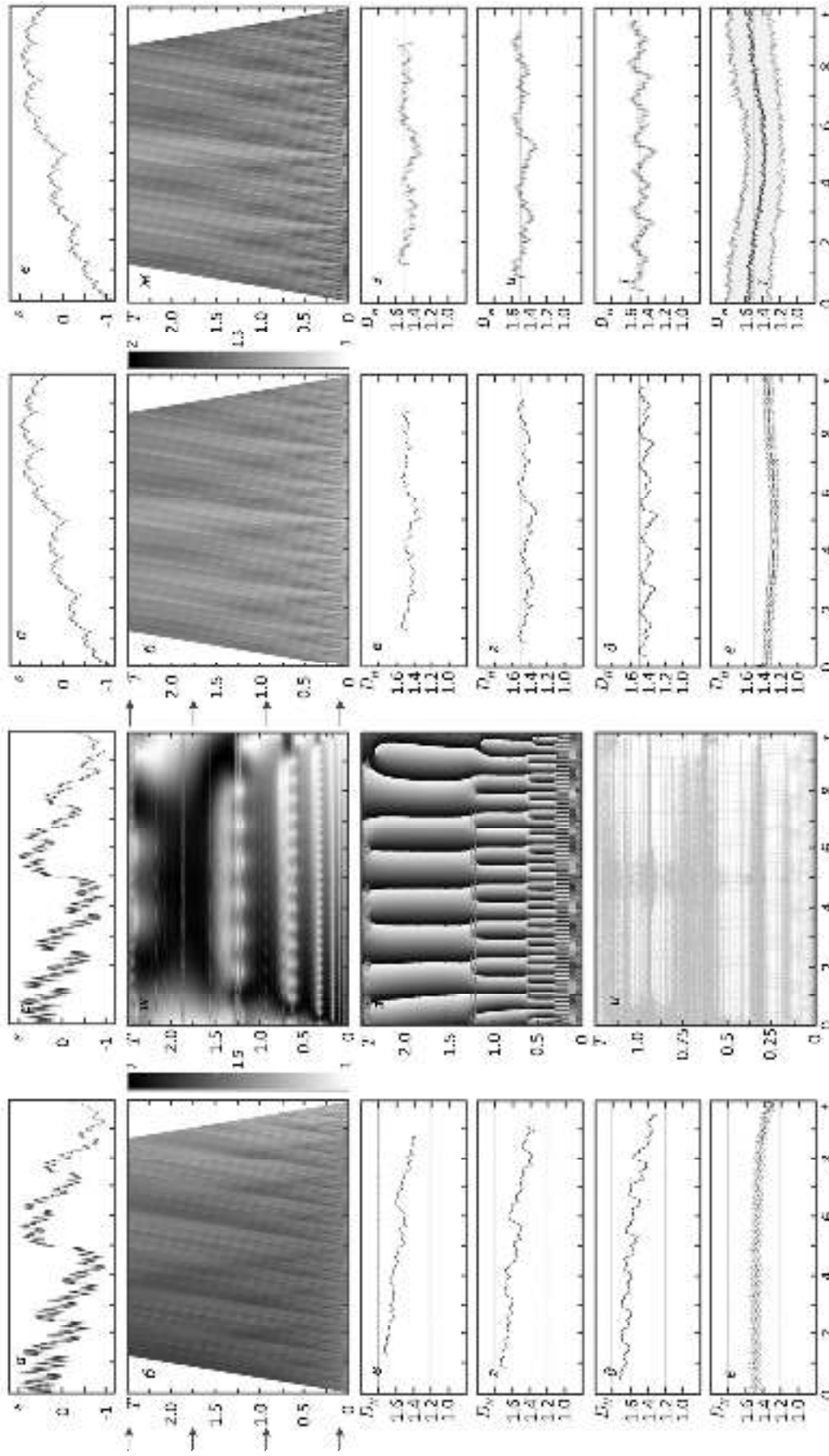


Рисунок 2.18 – Результати аналізу моделювання фазового простору (модель 5) за допомогою методу Дюффіна: а, є – сходи у частотній області, б – херстона розмірність  $D_H(t, T)$ , в, г, д, є – херстова розмірність  $D_H(t, T) = D_H(t, T)$  за фіксованих значень  $T$ . Позначено стрілками ліворуч на панелі б); характеристика СФ АВП (в області сходи 1-1.5); ж –  $|\dot{W}(t, T)|$ , з –  $\arg \dot{W}(t, T)$ , и – скелетон  $\arg \dot{W}(t, T)$ .

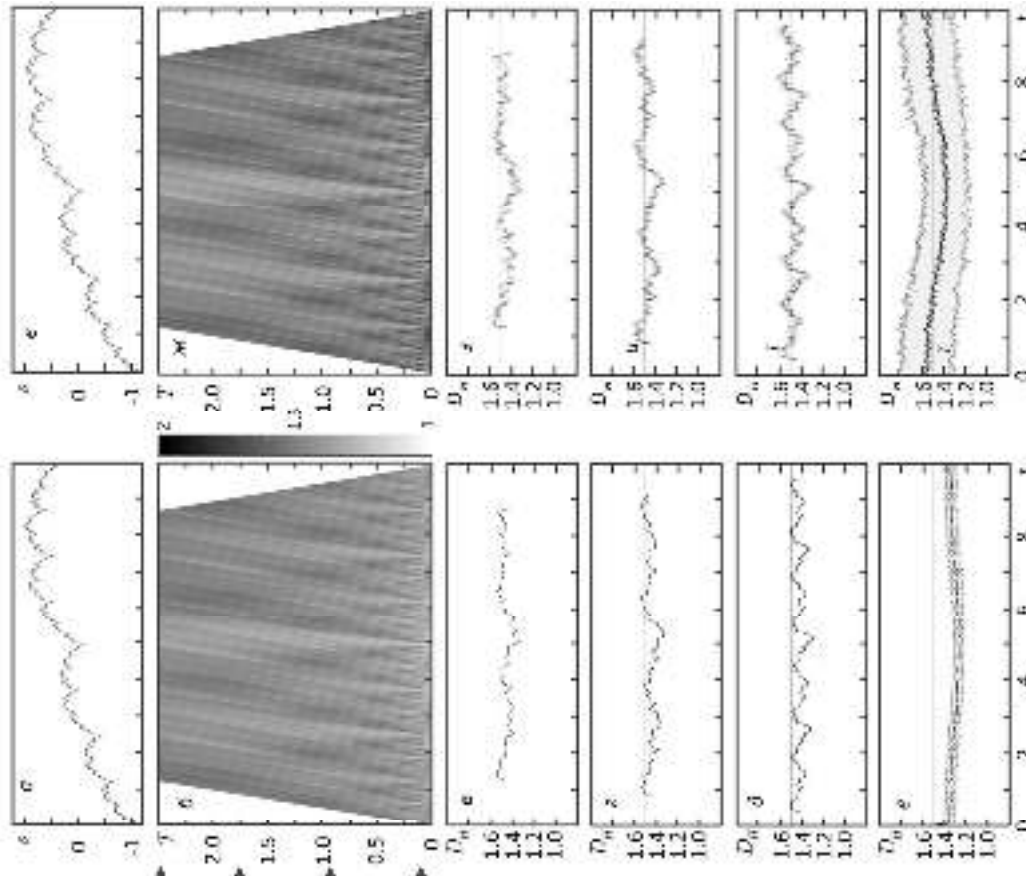


Рисунок 2.19 – Результати застосування методу КФ під час аналізу моделювання фазового простору (модель 1) за використанням методу Дюффіна: а, г – фазовий простір області, б – херстова розмірність  $D_H(t, T)$ , в, г, д, є – херстова розмірність  $D_H(t, T) \equiv D_H(t, T)$  за фіксованих значень  $T$  (по значенню стрілки ліворуч на панелі б); ж, з, і, і – те ж саме, але з використанням методу КФ. Сірий кольором позначено довільні інтервали.

Сірою заливкою на рис. 2.19, в – е, з – ї показано довірчі інтервали оцінюваних залежностей (рівень надійності 0.9). Зазначимо, що як й очікувалося, похибка оцінювання херстової розмірності  $\Delta D_H$  зростає із зменшенням ширини вікна  $T$ . Розрахунки  $D_H(t, T)$  проводилися для величин ширини вікна  $N$  від 32 до 2048 відліків, чому відповідає змінення безрозмірної змінної  $T$  від  $T_1 = 0.004$  до  $T_4 = 2.500$ .

Проводячи порівняння лівого (нескореговані значення) та правого (скореговані значення) стовпчиків, можна зробити наступні висновки.

Як було зауважено ще у пункті 2.5.3, результати застосування методу ДинФА для аналізу моделі 1 (рис. 2.19, б – е) мали певну ваду, яка полягає у тому, що оцінки херстової розмірності виявлялися істотно заниженими, особливо для найбільш вузьких вікон, чому відповідають малі значення змінної  $T$ . Тут же маємо можливість пересвідчитись, що використання методу КФ істотно покращує ситуацію. Натомість, певною платнею за це є збільшення ширини довірчого інтервалу, що добре помітно рис. 2.19, з – ї.

Ще краще отримані переваги видно на рис. 2.20, де наведено результати застосування методу КФ до моделі 2 (рис. 2.20, а, є), що містить дві половини з різними, але сталими у часі величинами фрактальних розмірностей  $D$ . Навіть у тональностях сірого кольору добре помітна різниця функцій  $D_H(t, T)$  до (рис. 2.20, б) та після (рис. 2.20, ж) застосування методу КФ. Те саме підтверджують залежності  $D_H(t, T_i)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , обчислені за наведених вище фіксованих значень  $T$  до (рис. 2.20, в – е) та після (рис. 2.20, з – ї) використання КФ. Заради справедливості слід зауважити, що на рис. 2.20, ї, де використовується найвузьче вікно, що містить тільки 32 точки ( $T_1 = 0.004$ ), величина скорегованої херстової розмірності здається дещо завищеною. Це дійсно так, але тут теоретичне значення потрапляє до довірчого інтервалу, тоді як до застосування методу КФ теоретична залежність у лівій частині графіку (рис. 2.20, е) туди не потрапляла жодним чином.

Більш того, ще вагомніше на користь застосування методу КФ при використанні методу ДинФА свідчать результати аналізу моделі 3 (рис. 2.21, а, є), у якій фрактальна розмірність лінійно зменшується із часом. Особливо рельєфно це проявляється під час порівняння рис. 2.21, е (до застосування КФ) та рис. 2.21, і (після нього). Як і для попередньої моделі, тут використовується найвужче вікно (32 точки,  $T_1 = 0.004$ ). Добре видно, що до обробки теоретична пряма  $D(t)$  розташована дуже далеко від розрахованої кривої  $D_H(t, T_1)$ , перетинаючись із нею лише в останній чверті (рис. 2.21, е). Натомість після обробки вона на всій своїй довжині потрапляє до довірчого інтервалу (рис. 2.21, і).

Результати аналізу моделей 4 та 5, що наведено відповідно на рис. 2.22 та рис. 2.23, також добре підтверджують переваги застосування методу КФ під час використання методу ДинФА.

Окремо слід зазначити, що особливості результатів застосування метода ДинФА до аналізу моделі 4, які має у власному складі нефрактальний УКНШС сигнал, вже досить докладно обговорювалися вище у пункті 2.5.2. Там було зроблено висновки про необхідність попередньої обробки аналізованого сигналу, яка полягає в усуненні гармонічного тренду. Така потреба виникає тоді, коли до вікна, в якому обчислюється херстова фрактальна розмірність, потрапляє більше ніж два періоди гармонічної функції. Метод КФ зарадити цьому теж не в змозі, про що свідчать результати моделювання, наведені на рис. 2.22, з, и. Останнє й не є дивним, оскільки метод КФ використовує результати самого методу ДинФА та усуває похибки, що виникають через особливості самого методу оцінювання обраної фрактальної розмірності, а не через особливості аналізованого сигналу.

Наприкінці цього підрозділу наведемо результати порівняння оцінок херстової розмірності  $D_H$  для моделей 6 – 8 стохастичних ФС, зроблених без і з використанням методу КФ. Це є корисним, оскільки допоможе розвіяти можливі побоювання про малу ефективність метода КФ для стохастичних ФС, оскільки самі КФ будувалися, як зазначено в підрозділі 2.4, з використанням детермінованих моделей ФС.

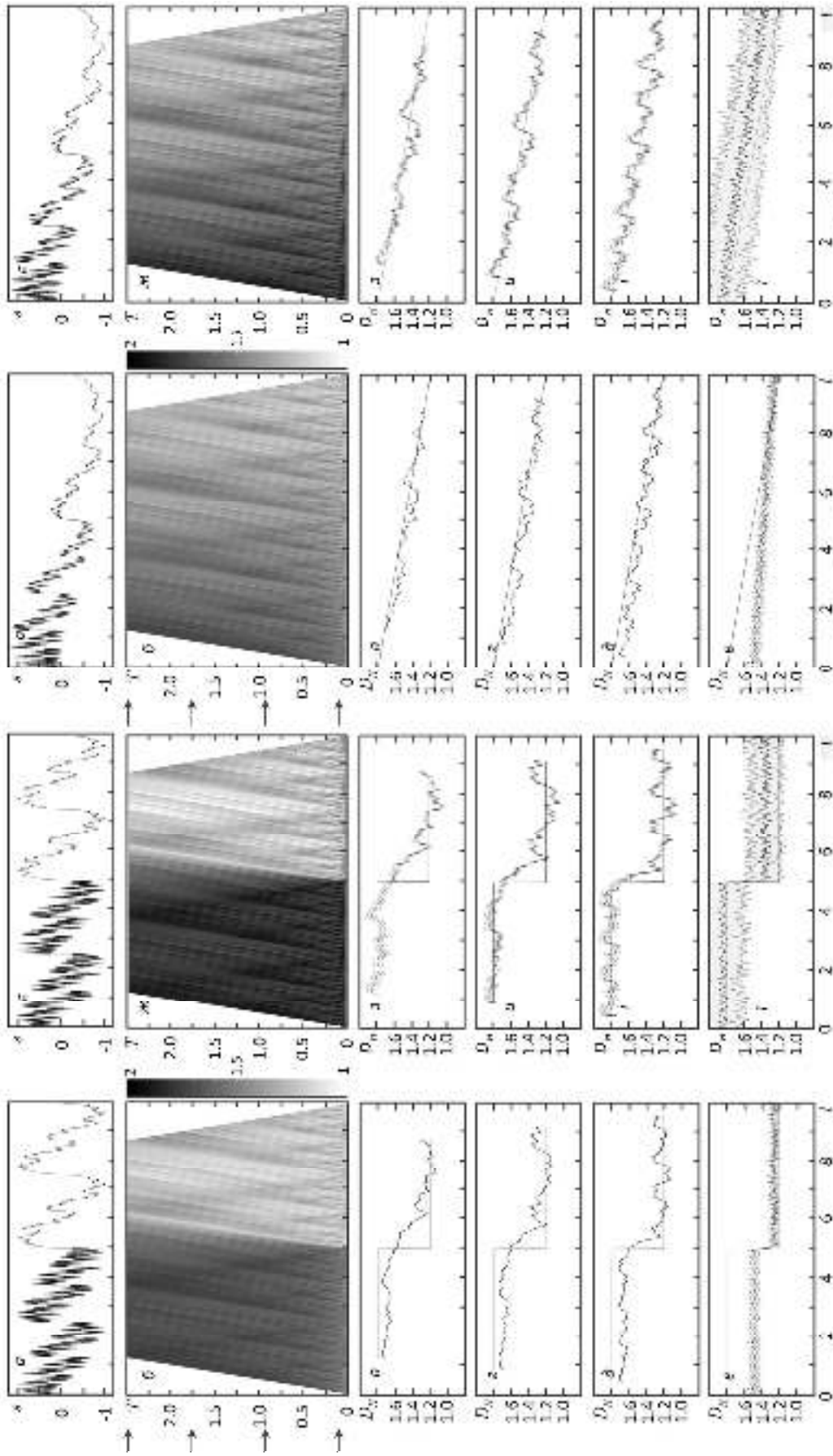


Рисунок 2.20 – Результати застосування методу КФ під час аналізу моделі-ного ФС (модель 2) з використанням методу ДинФА: а, в – ФС у часовій області, б – характеристична розірваність  $D_2(t, T)$ , в, г,  $T_1$ , е – характеристична розірваність  $D_2(t, T)$  за фіксованих значень  $T_1$  (показано стрілками ліворуч на півелі б); ж, з, і, і – те ж саме, але з використанням методу КФ. Сірим кольором позначено домірні інтервали.

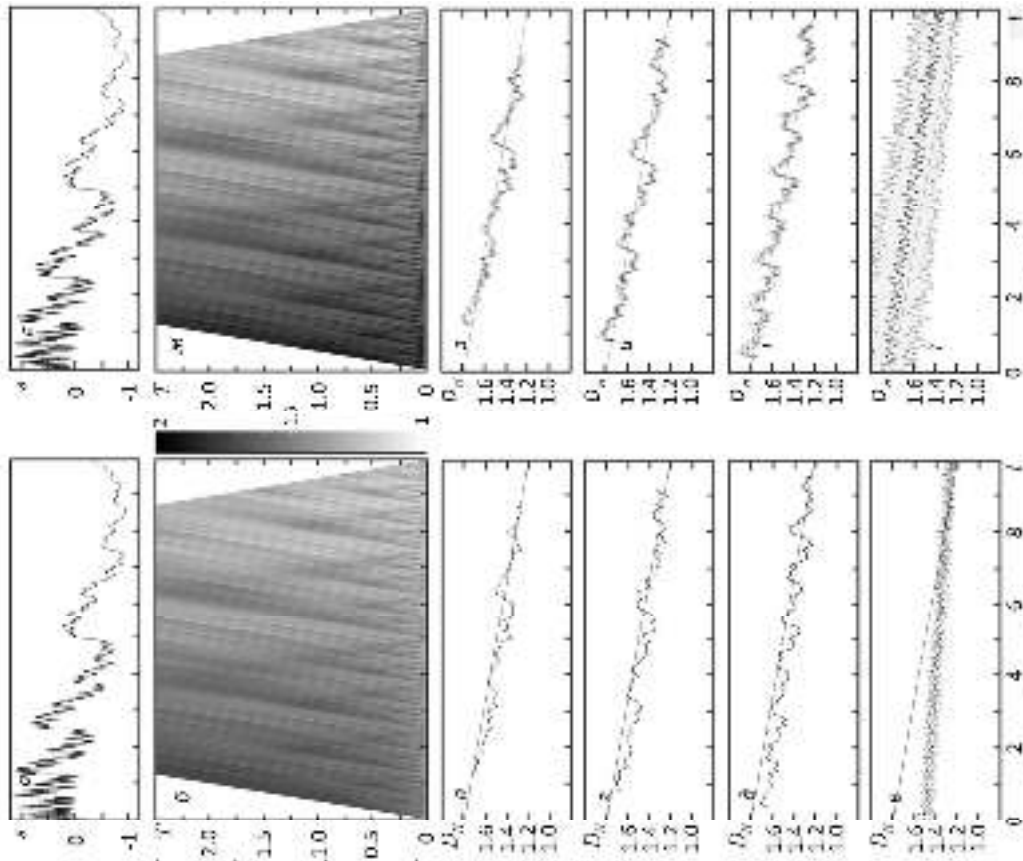


Рисунок 2.21 – Результати застосування методу КФ під час аналізу моделі-ного ФС (модель 3) з використанням методу ДинФА: а, в, е – ФС у часовій області, б – характеристична розірваність  $D_2(t, T)$ , в, г, д, е – характеристична розірваність  $D_2(t, T)$  за фіксованих значень  $T_1$  (показано стрілками ліворуч на півелі б); ж, з, і, і – те ж саме, але з використанням методу КФ. Сірим кольором позначено домірні інтервали.

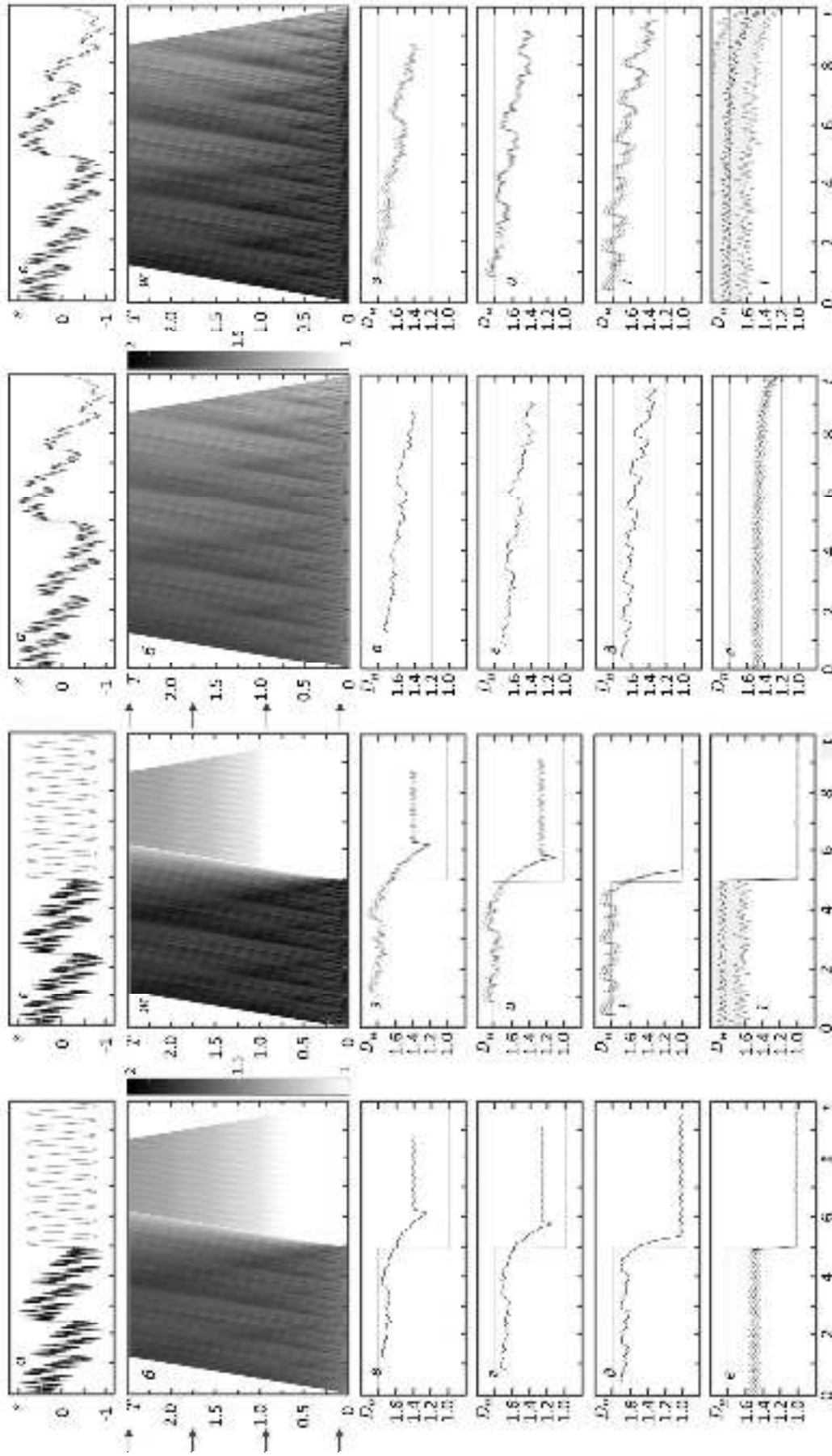


Рисунок 2.22 – Результати застосування методу КФ під час аналізу моделі нового ФС (модель 4) з використанням методу ДифФА: а, є – ФС у часовій області; б – характеристика розмірності  $D_H(t, T)$ ; в, г, л, є – характеристика розмірності  $D_{gr}(t) \equiv D_{gr}(t, T)$  за фіксованих значень  $T$  (показано стрілками ліворуч на панелі б); ж, з, і, і – те ж саме, але з використанням методу КФ. Стріки позначено довірчі інтервали.

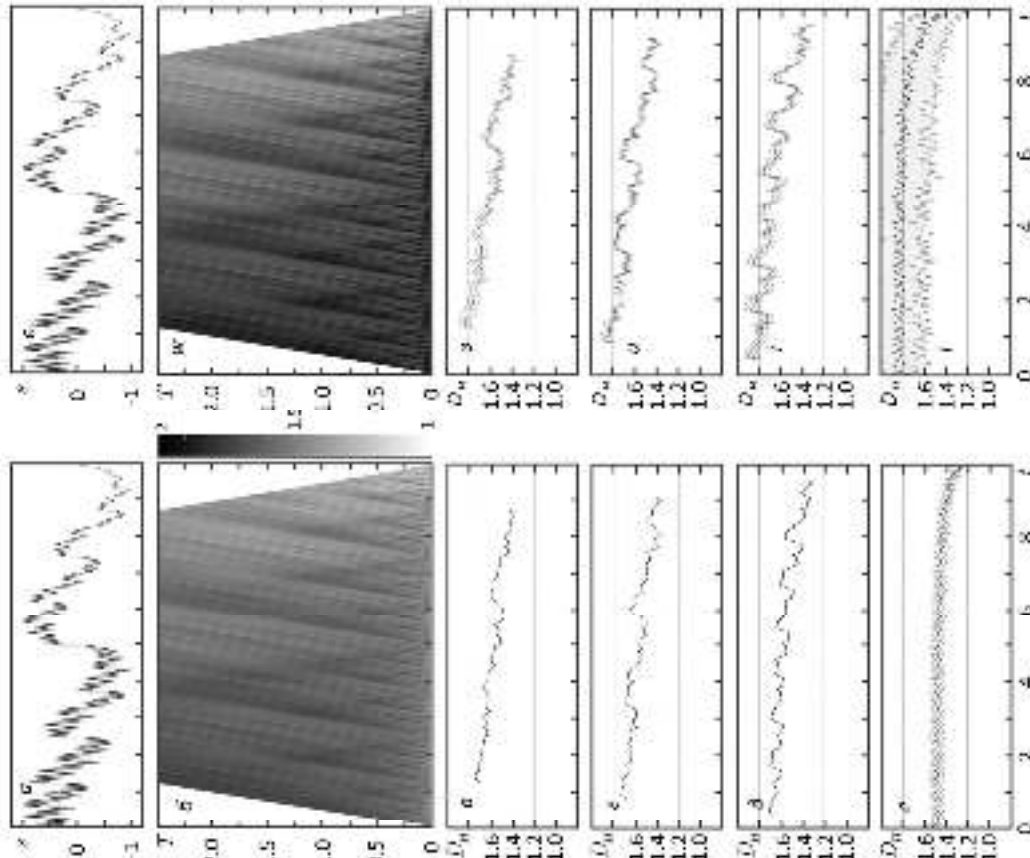


Рисунок 2.23 – Результати застосування методу КФ під час аналізу моделі нового ФС (модель 5) з використанням методу ДифФА: а, є – ФС у часовій області; б – характеристика розмірності  $D_H(t, T)$ ; в, г, л, є – характеристика розмірності  $D_{gr}(t) \equiv D_{gr}(t, T)$  за фіксованих значень  $T$  (показано стрілками ліворуч на панелі б); ж, з, і, і – те ж саме, але з використанням методу КФ. Стріки позначено довірчі інтервали.

Таблиця 2.16. Оцінки херстової розмірності моделей 6 – 8 стохастичних ФС без використання ( $D_{H1}$ ) та з використанням ( $D_{H2}$ ) методу КФ

Мо- дель	Оцінки	Теоретичне значення фрактальної розмірності $D$									
		1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	1.99
6	$D_{H1}$	1.201 $\pm 0.002$	1.335 $\pm 0.002$	1.411 $\pm 0.002$	1.471 $\pm 0.002$	1.580 $\pm 0.002$	1.634 $\pm 0.002$	1.710 $\pm 0.002$	1.743 $\pm 0.002$	1.796 $\pm 0.001$	1.872 $\pm 0.001$
	$D_{H2}$	1.000 $\pm 0.002$	1.149 $\pm 0.038$	1.288 $\pm 0.036$	1.379 $\pm 0.036$	1.540 $\pm 0.028$	1.622 $\pm 0.028$	1.738 $\pm 0.028$	1.794 $\pm 0.029$	1.884 $\pm 0.025$	1.983 $\pm 0.012$
7	$D_{H1}$	1.316 $\pm 0.003$	1.355 $\pm 0.002$	1.413 $\pm 0.002$	1.484 $\pm 0.002$	1.565 $\pm 0.002$	1.628 $\pm 0.001$	1.695 $\pm 0.002$	1.748 $\pm 0.001$	1.800 $\pm 0.001$	1.845 $\pm 0.001$
	$D_{H2}$	1.142 $\pm 0.028$	1.194 $\pm 0.027$	1.280 $\pm 0.028$	1.396 $\pm 0.028$	1.519 $\pm 0.028$	1.612 $\pm 0.028$	1.713 $\pm 0.028$	1.799 $\pm 0.030$	1.894 $\pm 0.032$	1.975 $\pm 0.025$
8	$D_{H1}$	1.227 $\pm 0.002$	1.269 $\pm 0.002$	1.353 $\pm 0.003$	1.475 $\pm 0.003$	1.499 $\pm 0.002$	1.598 $\pm 0.002$	1.634 $\pm 0.002$	1.732 $\pm 0.002$	1.784 $\pm 0.002$	1.833 $\pm 0.002$
	$D_{H2}$	1.042 $\pm 0.042$	1.087 $\pm 0.022$	1.180 $\pm 0.031$	1.379 $\pm 0.026$	1.418 $\pm 0.029$	1.568 $\pm 0.027$	1.621 $\pm 0.024$	1.770 $\pm 0.030$	1.862 $\pm 0.036$	1.957 $\pm 0.027$

При моделюванні використовувалося по 100 реалізацій кожного модельного стохастичного сигналу із кожним конкретним теоретичним значенням фрактальної розмірності  $D$ . Після цього отримані результати усереднювалися за ансамблем реалізацій. Всі отримані результати наведено у табл. 2.16. Як і в інших випадках моделювання, що проведено в даній роботі, кількість дискретних відліків модельного сигналу складає  $N = 8192$ .

Видно, що в цілому метод КФ для херстової розмірності, обчисленої для модельних стохастичних результатів, дає досить добрі результати, особливо для моделі 7 (модель УБР). Найгірші результати спостерігаються для моделі 8 (фрактальний шум) при малих значеннях фрактальної розмірності  $D$ .

Але останній результат не є вадою методу КФ. Слід зазначити, що коли фрактальна розмірність  $D$  наближається до 1, сам ФС потроху втрачає фрактальні властивості та при  $D = 1$  вироджується у гладку криву. Саме в цих умовах метод нормованого розмаху (див., наприклад, [53, 62, 90, 150, 153, 156]) дійсно показує найгірші результати.

## 2.6. Алгоритм фрактального аналізу експериментальних даних

Отже, на основі проведеного аналізу модельних ФС і МФС пропонується наступний алгоритм фрактального аналізу експериментальних даних.

1. Застосування до досліджуваного сигналу методу УФА. Це дає змогу отримати великий набір різноманітної кількісної інформації про аналізований сигнал. Окрім інформації про глобальні, локальні та точкові фрактальні властивості досліджуваного сигналу (прямі характеристики), цікавою є інформація про фрактальні особливості об'єктів, так би мовити, «другого рівня» (спектральні характеристики), тобто СФ інтегральних перетворень і характеристик на їх основі. Є також корисною інформація про властивості динамічної системи, здатної породити такий сигнал (характеристики фазового простору). Зважаючи на великий об'єм обчислень, що потребує метод УФА у «класичному варіанті», дослідник може самостійно визначати, від яких характеристик у конкретному випадку можна відмовитися.

2. Проведення дослідження сигналу із застосуванням методу ДинФА. Метод ДинФА є своєрідним «містком» між фрактальним і часо-частотним аналізами. Саме використання методу ДинФА дає змогу свідомо обирати ширину ковзаючого «вікна» у часовій області, спираючись на характерні масштаби часо-частотних структур досліджуваного сигналу.

3. Наполегливо рекомендується використання методу КФ для усіх обчислюваних фрактальних розмірностей, що розраховуються у методах УФА та ДинФА. Певним обмеженням може виступати лише потреба попередньої побудови коригуючої функції для кожного конкретного методу.

4. Для формулювання підсумкових результатів аналізу фрактальних властивостей досліджуваного сигналу або процесу обов'язковим є порівняння результатів, отриманих на попередніх кроках алгоритму.

## 2.7. Висновки до другого розділу

1. Запропоновано метод УФА – новий комплексний метод фрактального аналізу сигналів і процесів. Основна ідея метода полягає у тому, щоб отримати достатню кількість інформації про їх фрактальну структуру та характер її змін у часі

шляхом вивчення цілого набору числових характеристик та їх порівняння між собою. Використовуються прямі та спектральні характеристики, а також характеристики фазового простору. За інформативністю метод УФА значно перевищує решту існуючих методів монофрактального аналізу сигналів и процесів, оскільки він пропонує дослідження цілих шістнадцяти характеристик: восьми фрактальних розмірностей як прямих характеристик, семи – як спектральних характеристик та фрактальної розмірності атратора динамічної системи, здатної породити такий сигнал. Натомість для решти методів фрактального аналізу зазвичай застосовується максимум дві-три подібних характеристики.

2. Запропоновано метод ДинФА – новий метод фрактального аналізу, який встановлює зв'язок між отримуваними часовими залежностями фрактальних розмірностей та характерними часо-частотними структурами, що існують у досліджуваному сигналі. Здійснюється це через обрання конкретної ширини ковзаючого спектрального «вікна» у часовій області, що відповідає характерним масштабам існуючих часо-частотних структур. Додаткова інформація також міститься у фрактальній розмірності, що оцінюється над часо-частотною площиною сигналу.

3. Створено набір нових моделей ФНШС сигналів. З їх використанням досліджено ефективність оцінювання ємнісної, варіаційної та клітинної фрактальних розмірностей. Встановлено, що клітинна розмірність  $D_B$  дає найкращий результат у діапазоні  $1 \leq D \leq 1.3$ , варіаційна розмірність  $D_V$  – для  $1.3 < D \leq 1.6$ , а регуляризаційна розмірність  $D_R$  – для  $1.6 < D < 2$ . Виявлено та досліджено нелінійний характер залежності точності отримуваних оцінок вказаних фрактальних розмірностей від їх відомого істинного значення, а також від кількості відліків дискретного вектора даних досліджуваного модельного сигналу. На прикладі аналізу ФСГ ОПФ і ФСГ БВП продемонстровано, що частотна та часо-частотна структури модельного фрактального сигналу також мають фрактальні властивості. Для нефрактальних сигналів таких властивостей, як і очікувалося, немає.

4. Створено метод КФ, який дозволяє компенсувати завжди існуючу нелінійність залежності між істинним значенням фрактальної розмірності та її оцінкою,



здійсненою з використанням обраного методу монофрактального аналізу сигналів і процесів за відомої кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного сигналу. Ідея методу полягає у побудові та застосуванні спеціальної КФ з використанням набору модельних ФС із заздалегідь відомими значеннями фрактальної розмірності.

5. У рамках двох різних стратегій зменшення кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного модельного сигналу із використанням КФ для клітинної  $D_B$ , варіаційної  $D_V$ , регуляризаційної  $D_R$  та херстової  $D_H$  фрактальних розмірностей відшукано мінімальну кількість відліків  $N_{\min}$ , за якої ще можна оцінювати відповідні розмірності. Встановлено, що  $N_{\min}$  дорівнює 64 для  $D_H$  і  $D_R$ , 512 для  $D_B$  та 256 для  $D_V$  у рамках «стратегії децимації» та 32 для  $D_H$  і  $D_R$ , 256 для  $D_B$  та 64 для  $D_V$  у рамках «стратегії звуження вікна».

6. За умов використання мінімально дозволеної кількості відліків  $N_{\min}$  завдяки застосуванню метода КФ максимальне відхилення оцінюваної фрактальної розмірності від істинного відомого значення, яке дорівнювало 1) у рамках «стратегії децимації» для  $D_B$  23%, для  $D_R$  32%, для  $D_V$  56%, для  $D_H$  27%; 2) у рамках «стратегії звуження вікна» для  $D_B$  23%, для  $D_R$  21%, для  $D_V$  12%, для  $D_H$  31%, тепер не перевищує 5 – 7 %, а самі істинні значення даних фрактальних розмірностей впевнено потрапляють до довірчого інтервалу отриманої оцінки, побудованого для рівня надійності 0.9.

7. Із використанням спеціально створених моделей детермінованих і стохастичних ФС продемонстровано можливості методів ДинФА та КФ, виявлено особливості кожного з них.

8. На основі запропонованих нових методів фрактального аналізу сигналів і процесів розроблено алгоритм проведення монофрактального аналізу експериментальних даних, який використовується далі у даній роботі та може бути рекомендований іншим фахівцям для застосування в їх дослідженнях.

## РОЗДІЛ 3.

### МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЬНИХ СИГНАЛІВ

Результати даного розділу містяться у роботах автора [14, 24, 26].

#### 3.1. Методи мультифрактального аналізу

Незважаючи на наявність великої кількості методів мультифрактального аналізу, про що йшлося в підрозділі 1.7, у даній дисертаційній роботі ми обмежуємося використанням лише двох найбільш популярних серед практиків методів – метода WTMM і метода MF DFA.

##### *3.1.1. Метод WTMM*

Метод максимумів модуля вейвлет-перетворення (the Wavelet Transform Modulus Maxima – WTMM) як метод мультифрактального аналізу сигналів і процесів був запропонований у 1988 р. А. Арнеодо (A. Arneodo), Г. Грассо (G. Grasseau) та М. Холлшнайдером (M. Hollschneider) в роботі [175]. Він отримав власний розвиток у роботах С. Малла [105] та А. Арнеодо, Е. Бакрі та Дж. Мьюзі [176]. Даний метод ґрунтується на використанні двох інтегральних перетворень з апарату вейвлет-аналізу – БВП та АВП, СФ яких для сигналу  $s(t)$  задається співвідношеннями (2.7) і (2.8) відповідно (див., наприклад, [177]).

На нашу думку, найбільш вдало основи метода WTMM викладено в роботах [105, 178]. Стисло розглянемо їх нижче.

Перший крок застосування метода WTMM пов'язаний з обчисленням модуля СФ  $|Wf(a, b)|$  та пошуком її локальних максимумів для фіксованих значень  $a$ . Вважається, що в точці  $b_0$  існує локальний максимум, якщо для будь-якого  $b \in (b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon)$  при  $\varepsilon > 0$  виконується умова  $|Wf(a, b)| < |Wf(a, b_0)|$ . Позначимо множину отриманих локальних максимумів через  $L(b)$ . Після цього локальні максимуми поєднуються у ланцюжки. Ланцюжки, які не поширюються до  $a \rightarrow 0$ , видаляються з множини  $L(b)$ .

На другому кроці метода з використанням даної множини обчислюється узагальнена статистична сума  $Z(q, a)$ , що за визначенням задається співвідношенням (1.6). Виявляється, що вона пов'язана з отриманими ланцюжками максимумів:

$$Z(q, a) = \sum_{L(b)} |Wf(a, b)|^q,$$

де показник ступеня  $q$  може приймати будь-які значення в інтервалі  $-\infty < q < +\infty$ . Добре відомо (див., наприклад, [175, 178]), що узагальнена статистична сума  $Z(q, a)$  пов'язана з нелінійною функцією  $\tau(q)$ , відомою як скейлінгова експонента або показник маси, співвідношенням

$$\tau(q) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, a)}{\ln a}.$$

Зазначимо, що на практиці функція  $\tau(q)$  визначається з використанням лінійної регресії для залежності  $\ln Z(q, a)$  від  $\ln a$ .

На третьому кроці метода WTMM за відомою вже функцією  $\tau(q)$  обчислюють спектр узагальнених розмірностей  $D_q$ :

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q - 1}.$$

Нагадаємо, що за деяких фіксованих значень  $q$  ми отримуємо ємнісну ( $q = 0$ ,  $D_0 = D_C$ ), інформаційну ( $q = 1$ ,  $D_1 = D_I$ ) та кореляційну ( $q = 2$ ,  $D_2 = D_G$ ) розмірності, про що йдеться у пункті 1.4.2.

Четвертий крок алгоритма метода WTMM є пов'язаним з отриманням функції мультифрактального спектра  $f(\alpha)$ . Як було показано у пункті 1.4.3, перехід від змінних  $\{q, \tau(q)\}$  до змінних  $\{\alpha, f(\alpha)\}$  може бути здійсненим за допомоги перетворень Лежандра (1.7).

На відміну від класичного алгоритма Грассбергера та Прокаччи (див., наприклад, [110, 111, 118]) який завжди вважався популярним серед фахівців-практиків, метод WTMM дозволяє обчислювати мультифрактальні характеристики досліджуваного сигналу більш просто й ефективно – з використанням найпотужнішого математичного апарату вейвлет-аналіза, розвиток і становлення якого припали саме

на 1990-ті рр. Багаточисленні приклади з практики (див., наприклад, [163, 178]) переконливо свідчать про вірність даного твердження.

Ще одне дуже важливе зауваження, яке тут необхідно зробити, полягає в тому, що для фрактальних сигналів величина  $\alpha$ , відома в мультифрактальному аналізі як показник сингулярності, індекс сингулярності, експонента сингулярності, показник Ліпшиця – Гельдера або експонента або показник Гельдера, певною мірою, є аналогом показника Херста  $H$ . Це пояснюється тим фактом, що для монофрактального сигналу, побудованого на базі моделі УБР, функція мультифрактального спектра вироджується в одну-єдину точку, для якої маємо в точності  $\alpha_0 = H$  (див., наприклад, [33]). Більш того, величину  $\alpha^*$ , що визначає положення максимуму мультифрактального спектра, називають узагальненим показником Херста (саме до неї й колапсує мультифрактальний спектр для монофрактального сигналу) (див., наприклад, [179]). Але треба пам'ятати, що, строго кажучи, показник Херста  $H$  має статистичну природу й описує наявність у сигналі довготермінових залежностей. Тому він не має точкової локалізації. Натомість показник Гельдера  $\alpha \equiv H_l$  обчислюється в околі даної точки та характеризує функцію саме там, тобто має точкову локалізацію. Це вже докладно обговорювалося в пункті 2.1.2.

Також треба зауважити, що інколи в якості характеристики мультифрактала використовується величина  $dD = D_{-\infty} - D_{\infty}$  (див., наприклад, [179]).

### 3.1.2. Метод MF DFA

Будучи узагальненням відомого метода монофрактального аналізу (метода DFA – Detrended Fluctuation Analysis), метод MF DFA (multi-fractal DFA) з'явився в 2002 р. в роботі Я. Кантельхардта та ін. [177]. Його ідея полягає у наступному.

Нехай є дискретний сигнал  $s_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Алгоритм метода містить наступні п'ять кроків.

**Крок 1.** На основі початкового сигналу будуємо функцію, яку прийнято називати «профілем»:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i [s_k - \langle s \rangle], \quad \langle s \rangle = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^i s_k, \quad i = \overline{1, N}.$$

Крок 2. Ділимо профіль  $Y(i)$  на  $N_\kappa = [N / \kappa]$  сегментів однакової довжини  $\kappa$ , які не перетинаються, тут  $[x]$  – операція обчислення цілої частини числа  $x$ . Оскільки в більшості випадків величина  $N$  не ділиться на  $\kappa$  націло, то останній сегмент може виявитися коротшим за інші. Щоб не залишати без належної уваги цю частину сигналу, ту ж саму процедуру повторюють, починаючи з кінця сигналу. У результаті отримуємо  $2N_\kappa$  сегментів.

Крок 3. У межах кожного з  $2N_\kappa$  сегментів обчислюємо локальний тренд, причому використовуємо для цього поліноміальну апроксимацію та метод найменших квадратів. Потім обчислюємо дисперсію:

$$F^2(\nu, \kappa) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \{Y[(\nu - 1)\kappa + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad \nu = \overline{1, N_s},$$

$$F^2(\nu, \kappa) = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} \{Y[N - (\nu - N_s)\kappa + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad \nu = \overline{N_\kappa + 1, 2N_\kappa}.$$

Тут під  $y_\nu(i)$  розуміємо апроксимуючий поліном у сегменті з номером  $\nu$ . У залежності від ступеня полінома, що використовується, розрізняють методи MF DFA1, MF DFA2, MF DFA3 і т. і.

Крок 4. Усреднюючи функцію  $F^2(\nu, \kappa)$  по всіх сегментах, отримуємо флуктуаційну функцію  $q$ -го порядку:

$$F_q(\kappa) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, \kappa)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (3.1)$$

де змінна  $q$  може приймати будь-яке дійсне значення. Так, для  $q = 2$  отримуємо стандартну процедуру метода DFA. Кроки 2 – 4 слід повторювати для ряду різних значень  $\kappa$ . Звернемо увагу на те, що при використанні апроксимуючого полінома порядку  $m$  повинна виконуватись нерівність  $\kappa \geq m + 2$ .

Крок 5. Оскільки флуктуаційна функція  $q$ -го порядку  $F_q(\kappa) \sim s^{h(q)}$ , то в координатах  $\log F_q$  і  $\log \kappa$  за допомоги лінійної регресії, побудованої методом найменших квадратів, можна оцінити  $h(q)$  для різних значень  $q$ . Враховуючи те, що величина  $h(2)$  є ідентичною показникові Херста  $H$  початкового сигналу  $x_\kappa$ , то функцію  $h(q)$  називають узагальненим показником Херста.

Звернемо увагу на те, що при оцінюванні  $h(q)$  рекомендують виключати з розгляду як занадто великі ( $\kappa > N / 4$ ), так і занадто малі ( $s \leq 10$ ) масштаби.

Оскільки величина  $F_0(\kappa)$  не може бути отримана з використанням формули (3.1), для її оцінки застосовують наступне співвідношення:

$$F_0(\kappa) = \exp \left\{ \frac{1}{4N_\kappa} \sum_{\nu=1}^{2N_\kappa} \ln [F^2(\nu, \kappa)] \right\} \sim \kappa^{h(0)}.$$

Звична для мультифрактального формалізму скейлінгова експонента  $\tau(q)$  пов'язана з  $h(q)$  співвідношенням:

$$\tau(q) = qh(q) - 1,$$

а показник Ліпшиця-Гельдера  $\alpha$  та функція мультифрактального спектра  $f(\alpha)$  – співвідношеннями:

$$\alpha = h(q) + q \frac{dh(q)}{dq},$$

$$f(\alpha) = q[\alpha - h(q)] + 1$$

відповідно. Ширина функції мультифрактального спектра визначається зі співвідношень  $\Delta\alpha = h(-\infty) - h(\infty)$ ,  $\alpha_{\max} = h(-\infty)$ ,  $\alpha_{\min} = h(\infty)$ .

Ще однією корисною ідеєю, яка часто використовується в методі MF DFA, є застосування узагальненої біноміальної моделі мультифрактального процесу (див., наприклад, [180]), в межах якої існує така нелінійна апроксимація:

$$h(q) = \frac{1}{q} - \frac{\ln[a^q + b^q]}{q \ln 2},$$

де параметри  $a$  і  $b$  обчислюються методом найменших квадратів. В цьому випадку легко отримати, що

$$\Delta\alpha = \frac{\ln b - \ln a}{\ln 2}, \alpha_{\max} = \frac{\ln b}{\ln 2}, \alpha_{\min} = \frac{\ln a}{\ln 2}.$$

Іншим варіантом спрощення роботи з функцією мультифрактального спектра є її апроксимація функцією (див, наприклад, [181])

$$f(\alpha) = A(\alpha - \alpha_0)^2 + B(\alpha - \alpha_0) + C$$

з використанням того ж самого метода найменших квадратів. Для характеристики досліджуваного мультифрактального сигналу прийнято застосовувати параметри  $\alpha_0$ ,  $B$  і  $W = \alpha_{\max} - \alpha_{\min}$ , де  $f(\alpha_{\min}) = f(\alpha_{\max}) = 0$ . Перший з них характеризує положення максимуму функції мультифрактального спектра, другий описує її асиметрію, а третій – ширину. Такий підхід був запропонований Ю. Шимізу та ін. в 2002 р. в роботі [182].

У роботі [177] продемонстровано, що точність і здатність до ефективної боротьби з трендом у методів WTMM і MF DFA є приблизно однаковими.

Для практиків, що використовують СКМ MATLAB/SciLab, є корисною відмінна оглядова стаття [158]. На сьогодні метод MF DFA є дуже популярним серед дослідників (див., наприклад, [158, 181]).

### 3.1.3. Нові числові характеристики

Часто вважають, що в ідеальному варіанті функція мультифрактального спектру  $f(\alpha)$  дуже добре апроксимується параболою, як, наприклад, це запропоновано у попередньому пункті. І ця парабола є симетричною відносно вертикальної прямої, що проходить через її точку максимуму. Але практичний досвід підказує, що реальні мультифрактальні спектри часто виявляються несиметричними. Тому для урахування цього факту слід ввести додаткову числову характеристику.

Цю характеристику будемо називати *коефіцієнтом асиметрії функції мультифрактального спектру* та визначимо його через інші параметри як:

$$K_f = \ln \frac{\alpha_{\max} - \alpha^*}{\alpha^* - \alpha_{\min}}. \quad (3.2)$$

Аналізуючи співвідношення (3.2), легко побачити, що для симетричної функції мультифрактального спектру  $f(\alpha)$ , коли  $\alpha^* = (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$ , маємо  $K_f = 0$ . Натомість якщо максимум асиметрично зсунуто праворуч від симетричного положення ( $\alpha^* > (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$ ) спостерігається  $K_f < 0$ , а якщо ліворуч ( $\alpha^* < (\alpha_{\min} + \alpha_{\max}) / 2$ ), то  $K_f > 0$ . Важливо також, що коли мультифрактал у граничному випадку перетворюється на монофрактал з показником Гельдера  $\alpha_0$ , для якого  $\alpha_{\min} = \alpha_0 + \varepsilon$ ,  $\alpha_{\max} = \alpha_0 - \varepsilon$ ,  $\alpha^* = \alpha_0$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ , маємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} K_f(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \frac{\alpha_{\max} - \alpha^*}{\alpha^* - \alpha_{\min}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln \frac{\alpha_0 - \varepsilon - \alpha_0}{\alpha_0 - \alpha_0 - \varepsilon} = \ln 1 = 0.$$

Друга корисна числова характеристика, що ми пропонуємо використовувати для мультифрактального аналізу сигналів і процесів, є аналогом показника широкосмуговості для НШС сигналів. Вона задається співвідношенням:

$$\mu_\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\alpha^*} \quad (3.3)$$

та має назву *показника відносної ширини мультифрактального спектру*.

Показник відносної ширини мультифрактального спектру сигналу  $\mu_\alpha$  для строго монофрактального сигналу перетворюється на 0. Для інших видів сигналів, у тому числі й мультифрактальних, він є додатним. Така числова характеристика дозволить оцінювати, наскільки досліджуваний сигнал або процес є близьким до монофрактального.

Ще одне запропоноване нами доповнення набору традиційних числових характеристик, що використовуються під час проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, стосується розмірності так званого носія мультифракталу (multi-fractal support). Добре відомо (див., наприклад, [105]) що у випадку сигналу або процесу носієм мультифрактала є гладка крива, фрактальна розмірність  $D_F$  якої завжди дорівнює одиниці. Саме тому точка максимуму функції мультифракта-



льного спектра  $(\alpha^*, f(\alpha^*))$  майже завжди має  $f(\alpha^*) = 1$ . Але у випадку монофрак- талу з показником Гельдера  $\alpha_0$ , як було вже сказано вище, увесь мультифракталь- ний спектр колапсує у точку  $(\alpha_0, \alpha_0)$ . І оскільки для монофрактала  $0 < \alpha_0 < 1$ , то й ордината точки положення максимуму сколапсованого спектра виявляється мен- шою за одиницю. У переважній більшості випадків це не відіграє суттєвої ролі, але при дослідженні нестационарних сигналів і процесів це зовсім не так.

Якщо сигнал або процес  $s(t)$  є нестационарним у сенсі зміни у часі його фра- ктальних властивостей, то аналіз числових характеристик мультифрактального спектра треба проводити у часовому вікні скінченної ширини  $T$  (див., наприклад, [158]). Положення цього вікна на часовій осі відносно досліджуваного сигналу під час обчислення мультифрактальних характеристик перетворює ці характеристики на функції часу. Так саме стається і з ординатою точки максимуму функції мульти- фрактального спектра, тобто вона стає функцією часу  $f(\alpha^*) \equiv f_\alpha = f_\alpha(t)$ .

Важливо, що на графіку  $f_\alpha(t)$  провали нижче рівня  $f(\alpha^*) = 1$  сигналізувати- муть про те, що мультифрактальний процес переходить у монофрактальний режим. Побачити це одночасно на трьох залежностях  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$  і  $\Delta\alpha(t)$  значно скла- дніше та незручніше.

Таким чином, для кожного сигналу, що досліджуватиметься нижче із засто- суванням методу MF DFA, ми будемо використовувати часові залежності  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$ ,  $K_f(t)$  і  $f_\alpha(t)$ , наводячи результати аналізу у спеціально створеному зручному форматі.

### 3.2. Мультифрактальний аналіз модельних фрактальних сигналів

Для проведення мультифрактального аналізу ми використовуємо ті ж самі модельні сигнали (пункт 2.5.1), що й у випадку монофрактального аналізу, оскільки є цікавим і корисним порівняти не тільки результати мультифрактального аналізу різних сигналів між собою, а й результати моно- та мультифрактального аналізів одного й того ж самого модельного ФС або МФС.

### 3.2.1. Метод WTMM

Спочатку розглянемо результати використання методу WTMM. Він застосовувався для аналізу одразу всієї реалізації модельного ФС або МФС сигналу. Отримані мультифрактальні спектри моделей 1 – 10 наведено на рис. 3.1.

Нагадаємо, що моделі 1 – 5 є детермінованими моделями ФС і МФС.

Для моделі 1 (рис. 2.26, а) маємо  $\alpha_{\min} = 0.55$ ,  $\alpha_{\max} = 0.61$ ,  $\Delta\alpha = 0.06$ ,  $\alpha^* = 0.58$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.10$  (рис. 3.1, а). Оскільки це модель монофрактального сигналу ( $D = 1.5$ ), згадана раніше теорія стверджує, що його функція мультифрактального спектру  $f(\alpha)$  повинна колапсувати у точку  $(\alpha_0, f(\alpha_0))$ , де  $\alpha_0 = 2 - D = 0.5$ . Наразі видно, що це не так. Мультифрактальний спектр став дуже вузьким ( $\mu_\alpha = 0.10$ ), але не точковим ( $\mu_\alpha = 0$ ). Цей практичний факт є відомим у літературі (див., наприклад, [177]) і зазвичай пояснюється тим, що теорія створена для математичних фракталів, а ФС у вигляді скінченного дискретного вектора даних є фізичним фракталом. Також слід зазначити, що отримана величина узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.58$ ) є дещо завищеною відносно істинного відомого значення ( $\alpha_0 = 0.50$ ).

Для моделі 2 (рис. 2.21, а) маємо  $\alpha_{\min} = 0.30$ ,  $\alpha_{\max} = 0.87$ ,  $\Delta\alpha = 0.57$ ,  $\alpha^* = 0.58$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.98$  (рис. 3.1, б). Це типова модель МФС, тому її функція мультифрактального спектра є доволі широка ( $\mu_\alpha = 0.98$ ). Обидві монофрактальні компоненти, показники Гельдера яких дорівнюють відповідно  $\alpha_1 = 0.2$  і  $\alpha_2 = 0.8$ , утворюють цю ширину ( $\Delta\alpha \approx \alpha_2 - \alpha_1$ ), хоча увесь спектр виявляється дещо зсунутим праворуч ( $\alpha^* > (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$ ) на величину, аналогічну тій, яка отримана для моделі 1. Сам спектр є симетричним ( $K_f = 0.0$ ).

Для моделі 3 (рис. 2.22, а) маємо  $\alpha_{\min} = 0.28$ ,  $\alpha_{\max} = 0.86$ ,  $\Delta\alpha = 0.58$ ,  $\alpha^* = 0.57$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.02$  (рис. 3.1, в). Будучи моделлю МФС,

модель 3 істотно відрізняється від моделі 2 тим, що у першій є всі складові в інтервалі  $\alpha \in [0.2, 0.8]$ , а у другій – тільки дві кінцеві ( $\alpha_1 = 0.2$  і  $\alpha_2 = 0.8$ ). Натомість результати ми отримали фактично однакові. Звідси можна зробити дуже важливий висновок: розрізнити такі моделі виключно за виглядом функції мультифрактального спектру всієї реалізації сигналу неможливо. Тобто одному вигляду мультифрактального спектра можуть відповідати абсолютно різні сигнали. Це не виглядає особливо дивним, якщо згадати, що й однакові значення фрактальних розмірностей двох фракталів нічого не кажуть про подібність їх структур.

Для моделі 4 (рис. 2.23, а) маємо  $\alpha_{\min} = 0.34$ ,  $\alpha_{\max} = 3.99$ ,  $\Delta\alpha = 3.65$ ,  $\alpha^* = 1.83$ ,  $K_f = 0.37$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.99$  (рис. 3.1, г). Це дуже важливий результат, оскільки він показує, яким негативним чином наявність нефрактального (у даному разі, гармонічного) сигналу впливає на результати мультифрактального аналізу. За логікою попередніх двох отриманих результатів і зважаючи на те, що будь-яка гладка крива має  $\alpha_1 = 1.0$ , можна було б очікувати, що функція мультифрактального спектра розташується праворуч від монофрактальної складової ( $\alpha_2 = 2 - D = 0.5$ ), але не сильно відходячи від  $\alpha_1 = 1.0$ . Але вийшло зовсім не так. Утворився дуже широкий ( $\mu_\alpha = 1.99$ ) асиметричний ( $K_f = 0.37$ ) спектр, до того ж отримані значення  $\alpha_{\max} = 3.99$  і  $\alpha^* = 1.83$  порушують умови фрактальності ( $0 < \alpha^* < 1$ ). Аналогічні результати можна отримати і у випадку, якщо в даній моделі замінити гармонічну функцію на якусь іншу гладку (не обов'язково, періодичну) функцію (модель 4а). Цей результат добре пояснює, чому в літературі є поради щодо усунення трендів (наприклад, з використанням поліномів, фур'є- та вейвлет-фільтрації і т. і.) з експериментальних даних. Треба також зазначити, що у випадку адитивної суми фрактального та нефрактального сигналів негативний вплив останнього є істотно меншим.

Для моделі 5 (рис. 2.30, в) маємо  $\alpha_{\min} = 0.31$ ,  $\alpha_{\max} = 0.87$ ,  $\Delta\alpha = 0.56$ ,  $\alpha^* = 0.44$ ,  $K_f = 1.20$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.23$  (рис. 3.1, д). Особливість даної моделі

у порівнянні з моделями 2 і 3 полягає у тому, що подібно до другої моделі вона має тільки дві монофрактальні компоненти з ( $\alpha_1 = 0.2$  і  $\alpha_2 = 0.8$ ), але вони не змінюють одна одну, а задаються із змінним у часі співвідношенням амплітуд. Важливо відзначити, що величини  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $f_\alpha$  отримано маже такі самі, натомість через істотну асиметрію спектра ( $K_f = 1.20$ ) значення узагальненого показника Херста виявилось суттєво іншим, ніж для моделей 2 і 3. Відповідно збільшилося і значення показника відносної ширини функції мультифрактального спектра ( $\mu_\alpha = 1.23$ ). До речі, саме для характеристики подібних сигналів і було запропоновано нові числові характеристики, такі як  $K_f$  і  $\mu_\alpha$ .

Тепер звернемося до стохастичних моделей ФС і МФС, якими є моделі 6 – 10. Для них отримано наступні результати.

Для моделі 6 з  $D = 1.2$  (рис. 3.1, е) маємо  $\alpha_{\min} = 0.84$ ,  $\alpha_{\max} = 0.86$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.85$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 0.94$ ,  $\mu_\alpha = 0.02$ . Це типовий монофрактальний сигнал, спектр якого є дуже вузьким ( $\mu_\alpha = 0.02$ ), але він, як і для моделі 1, не перетворився на точку. Натомість значення функції мультифрактального спектру у максимумі ( $f_\alpha = 0.94$ ) нарешті відхилилося від одиниці. І хоча воно не досягло теоретичного значення (у даному разі це 0.8), можна стверджувати, що модель 5 має більш адекватні якості монофрактального сигналу, ніж модель 1. Оцінка узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.85$ ) також дещо перевищує теоретичну (0.8).

Для моделі 6 з  $D = 1.8$  (рис. 3.1, е) маємо  $\alpha_{\min} = 0.38$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.39$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.05$ . Повністю аналогічна ситуація спостерігається для моделі 6 і за іншого значення фрактальної розмірності. Однак відхилення значення узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.39$ ) від теоретичного (0.2) є дещо більшим.

Для моделі 7 з  $D = 1.2$  (рис. 3.1, ж) маємо  $\alpha_{\min} = 0.72$ ,  $\alpha_{\max} = 0.90$ ,  $\Delta\alpha = 0.18$ ,  $\alpha^* = 0.80$ ,  $K_f = 0.22$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.23$ . Модель 7 є моделлю монофрактального сигналу, що базується на УБР. Її доцільного порівнювати із моделями 1 і 6. Не можна однозначно сказати, гірша вона чи краща за них. З одного боку, вона має гіршу монофрактальність ( $\mu_\alpha = 0.23$ ), але, з іншого боку, забезпечує найкраще мінімальне відхилення узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.80$ ) від теоретичного значення.

Для моделі 7 з  $D = 1.8$  (рис. 3.1, з) маємо  $\alpha_{\min} = 0.24$ ,  $\alpha_{\max} = 0.39$ ,  $\Delta\alpha = 0.15$ ,  $\alpha^* = 0.32$ ,  $K_f = -0.13$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.47$ . Для іншого значення фрактального розмірності вказані тенденції зберігаються.

Для моделі 8 з  $D = 1.2$  (рис. 3.1, і) маємо  $\alpha_{\min} = 0.54$ ,  $\alpha_{\max} = 0.94$ ,  $\Delta\alpha = 0.50$ ,  $\alpha^* = 0.78$ ,  $K_f = -0.41$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.64$ . Восьма модель також є моделлю монофрактального сигналу. Порівняно з моделями 1, 6 і 7, вона має ще гірше локалізований мультифрактальний спектр, але забезпечує порівняно мале відхилення оцінки узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.78$ ) від теоретичного значення (0.8). До того ж спектр цієї моделі за формою є дещо асиметричним ( $K_f = -0.41$ ).

Для моделі 8 з  $D = 1.8$  (рис. 3.1, и) маємо  $\alpha_{\min} = 0.26$ ,  $\alpha_{\max} = 0.47$ ,  $\Delta\alpha = 0.21$ ,  $\alpha^* = 0.38$ ,  $K_f = -0.29$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.55$ . Така сама за характером ситуація спостерігається і для іншого значення фрактальної розмірності.

Для моделі 9 (рис. 3.1, к) маємо  $\alpha_{\min} = 0.30$ ,  $\alpha_{\max} = 1.20$ ,  $\Delta\alpha = 0.90$ ,  $\alpha^* = 0.65$ ,  $K_f = 0.45$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.38$ . Модель 9 є моделлю стохастичного МФС. Отримані числові значення добре віддзеркалюють це. Функція мультифрактального спектру є доволі широкою ( $\mu_\alpha = 1.38$ ), дещо асиметричною ( $K_f = 0.45$ ). Вона також є трохи зсунутою праворуч від очікуваного значення. На нашу думку,

таким можна вважати 0.5, оскільки показник Гельдера цієї моделі лінійно зростає від 0.1 до 0.9, а 0.5 є середнім арифметичним.

Для моделі 10 (рис. 3.1, л) маємо  $\alpha_{\min} = 0.31$ ,  $\alpha_{\max} = 1.27$ ,  $\Delta\alpha = 0.96$ ,  $\alpha^* = 0.90$ ,  $K_f = -0.47$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.07$ . На відміну від моделі 9, модель 10 має більш складний закон змінення у часі показника Гельдера, що відбувається від у межах від 0.2 до 0.8. Ширина спектру виявляється подібною ( $\mu_\alpha = 1.07$ ), але асиметрія спектру тепер спостерігається у протилежний бік ( $K_f = -0.47$ ), а значення узагальненого показника Херста ( $\alpha^* = 0.90$ ) істотно відрізняється від середнього значення (0.5). Отже, звідси можна зробити важливий висновок: часова залежність показника Гельдера сигналу має вплив на частину числових параметрів ( $\alpha^*$ ,  $K_f$ ,  $\mu_\alpha$ ). Натомість початкове та кінцеве значення інтервалу змінення показника Гельдера для МФС впливає на величини  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $\Delta\alpha$  і  $\mu_\alpha$ .

Слід зазначити, що оскільки моделі 6 – 10 є стохастичними, то кожна з наведених вище реалізацій є випадковою. Це важливо, оскільки отримувані мультифрактальні параметри також є випадковими та змінюються для різних реалізацій однієї тієї самої моделі із одними тими самими параметрами. Тому по одній реалізації вважати, наприклад, що отримане значення узагальненого показника Херста для моделі 7 з  $D = 1.2$  точно співпадає з теоретичним, не можна. Проведене моделювання свідчить про те, що параметри варіюються у досить широких межах. Навіщо ми взагалі говоримо тут про це, стане зрозумілим у підрозділі 3.7.

Для моделі ФНШС сигналу  $FUWB_{15}(t)$  з  $D = 1.5$  (рис. 3.1, м) маємо  $\alpha_{\min} = 0.55$ ,  $\alpha_{\max} = 0.57$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.56$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.04$ . Дана модель також наводиться тут тому, що її досить часто використовують у інших частинах роботи. Будучи моделлю ФНШС сигналу з одного боку, з

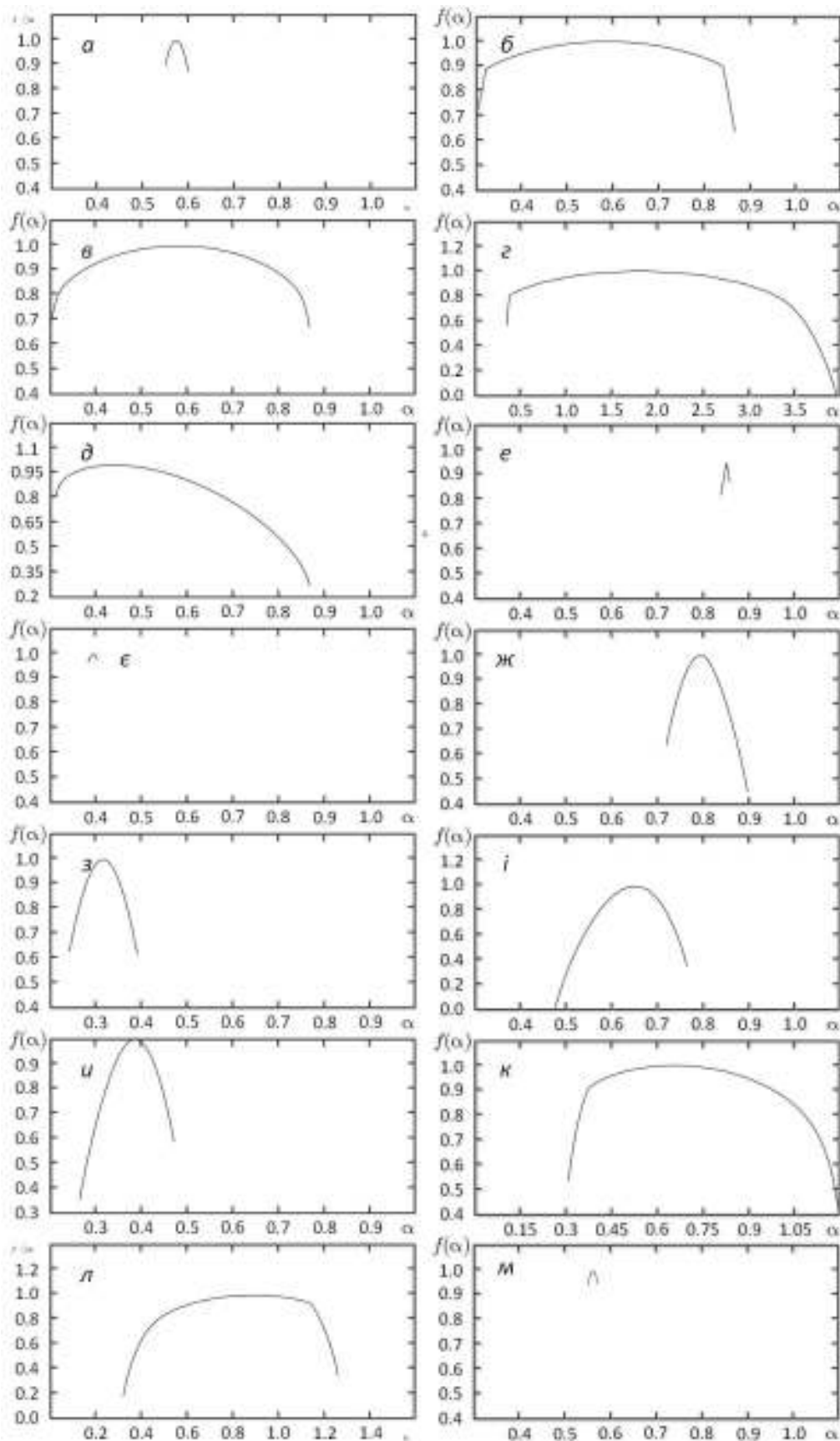


Рисунок 3.1 – Мультифрактальні спектри (метод WTMM) модельних ФС: а – модель 1, б – модель 2, в – модель 3, г – модель 4, д – модель 5, е – модель 6 з  $D = 1.2$ , є – модель 6 з  $D = 1.8$ , ж – модель 7 з  $D = 1.2$ , з – модель 7 з  $D = 1.8$ , і – модель 8 з  $D = 1.2$ , и – модель 8 з  $D = 1.8$ , к – модель 9, л – модель 10.

іншого боку вона є хорошою моделлю монофрактального сигналу, що має дуже вузький мультифрактальний спектр ( $\mu_\alpha = 0.04$ ) та невелике завищення оцінки загального показника Херста ( $\alpha^* = 0.56$ ) відносно теоретичного (0.5).

### 3.2.2. Метод MF DFA

У попередньому пункті було продемонстровано, що у переважній більшості випадків одному й тому зовнішньому виглядові (і відповідно, одному й тому самому наборові числових характеристик) можуть відповідати геть різні за фрактальною структурою МФС. Основою такої структури є часовий закон змінення показника Гельдера. Метод WTMM, результати застосування якого до модельних сигналів наведено у попередньому пункті, ніякої інформації щодо даного часового закону дати не здатний. Тому тепер звернемося до методу MF DFA, який дозволяє отримати таку інформацію.

Фактично метод MF DFA досліджує сигнал по частинах, тобто у ковзаючому вікні (віконній функції) скінченної довжини у часовій області. Отримане значення тієї чи іншої мультифрактальної характеристики на часовій осі відповідає положенню середини вікна. Наведені нижче результати отримані для ковзаючого прямокутного вікна шириною  $1/10$  від загальної довжини дискретного вектора даних аналізованого сигналу. До речі, дізнатися про це можна, якщо подивитися, на скільки відступає графік числової характеристики від краю відповідної панелі. Цей відступ складає половину ширини аналізуючого вікна.

Результати застосування методу MF DFA до тих самих модельних сигналів, що й у попередньому пункті, викладено на рис. 3.2 – 3.14. Для цього створено простий формат представлення даних (див. рис. 3.2), суть якого полягає у наступному. На рис. 3.2, а розташовано аналізований сигнал у часовій області. Нижче послідовно зображено часові залежності числових характеристики мультифрактального спектру:  $\alpha_{\min}(t)$  (рис. 3.2, б),  $\alpha_{\max}(t)$  (рис. 3.2, в),  $\Delta\alpha(t)$  (рис. 3.2, г),  $\alpha^*(t)$  (рис. 3.2, д),  $K_f(t)$  (рис. 3.2, е) і  $f_\alpha(t)$  (рис. 3.2, є). У самому низу перебуває графік ФСГ БВП сигналу (рис. 3.2, ж).



Для всіх модельних сигналів у цьому місці використовувався вейвлет Добеши четвертого порядку (db4 за поширеною класифікацією СКМ MATLAB/SciLab). ФСГ БВП дуже добре відображає часо-частотний склад аналізованого сигналу, а тому є вкрай корисною для розуміння часових змін числових характеристик мультифрактального спектру.

Тепер розглянемо отримані особливості кожної моделі. Почнемо з детермінованих моделей 1 – 5.

Модель 1, що є моделлю монофрактального сигналу з фрактальною розмірністю  $D = 1.5$  (рис. 3.2, а), як і слід було очікувати, має майже незмінні у часі залежності  $\alpha_{\min}(t)$  (рис. 3.2, б),  $\alpha_{\max}(t)$  (рис. 3.2, в),  $\Delta\alpha(t)$  (рис. 3.2, г),  $\alpha^*(t)$  (рис. 3.2, д),  $K_f(t)$  (рис. 3.2, е) і  $f_\alpha(t)$  (рис. 3.2, є). Слово «майже» означає, що певні флуктуації існують, але вони малі. Величини  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  і  $f_\alpha(t)$  майже не відрізняються від аналогічних результатів методу WTMM ( $\alpha_{\min} = 0.55$ ,  $\alpha^* = 0.58$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ), середні значення  $\Delta\alpha(t)$  (приблизно 0.15) і  $\alpha_{\max}(t)$  (приблизно 0.7) дещо перевищують дані методу WTMM ( $\Delta\alpha = 0.06$ ,  $\alpha_{\max} = 0.61$ ), до того ж спектр виявляється трохи асиметричним ( $K_f(t) \approx -0.5$  на відміну від  $K_f = 0.0$ ).

Модель 2, що містить два послідовно розташованих у часі монофрактальних сигнали з  $D = 1.8$  і  $D = 1.2$  (рис. 3.3, а), чітко демонструє переваги метода MF DFA відносно вивчення часових змін фрактальних характеристик досліджуваного сигналу. Оскільки метод WTMM дає, у певному сенсі, якесь середнє значення мультифрактальних характеристик ( $\alpha_{\min} = 0.30$ ,  $\alpha_{\max} = 0.87$ ,  $\Delta\alpha = 0.57$ ,  $\alpha^* = 0.58$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.98$ ) для обох присутніх монофрактальних компонент, то метод MF DFA завдяки вікну у часовій області демонструє положення у часі кожної з компонент, а також зону переходу від однієї до іншої, коли до вікна потрапляє різне співвідношення для кількості енергій обох компонент (рис. 3.3). Для першої компоненти ( $D = 1.8$ ) при  $t \in [0.5, 4.2]$  маємо  $\alpha_{\min}(t) = 0.35$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 0.40$ ,  $\Delta\alpha(t) = 0.05$ ,  $\alpha^*(t) = 0.40$ ,  $K_f(t) = -1.1$ ,

$f_\alpha(t) = 1.0$ . Для другої компоненти ( $D = 1.2$ ) при  $t \in [5.8, 9.5]$  маємо  $\alpha_{\min}(t) = 0.80$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 1.00$ ,  $\Delta\alpha(t) = 0.20$ ,  $\alpha^*(t) = 0.90$ ,  $K_f(t) = 0.0$ ,  $f_\alpha(t) = 1.0$ . У середній зоні ( $t \in [4.2, 5.8]$ ) спостерігається перехід, де важливо, що узагальнений показник Херста  $\alpha^*(t)$  зростає приблизно за лінійним законом. Ширина цієї середньої зони, зрозуміло, залежить від ширини вікна, що використовується, і дорівнює приблизно двом таким ширинам.

Модель 3 (рис. 3.4, а), у якій фрактальна розмірність  $D(t)$  із часом зменшується за лінійним законом від 1.8 до 1.2, також у методі MF DFA показує зовсім інші результати (рис. 3.4), ніж у методі WTMM ( $\alpha_{\min} = 0.28$ ,  $\alpha_{\max} = 0.86$ ,  $\Delta\alpha = 0.58$ ,  $\alpha^* = 0.57$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.02$ ). Зрозуміло, що в цілому модель є МФС, але в кожен окремий момент часу її мультифрактальність залежить від ширини віконної функції. У даному разі маємо лінійне зростання  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  і майже незмінність  $\Delta\alpha(t)$ ,  $K_f(t)$  і  $f_\alpha(t)$ . Зазначимо, що  $\alpha^*(t)$  лінійно зростає приблизно від 0.4 до 0.8, що певною мірою відрізняється від того, що мало бути (від 0.2 до 0.8).

Модель 4 (рис. 3.5, а), що містить монофрактальну та нефрактальну гармонічну частини, є досить важливою для практичного розуміння результатів мультифрактального аналізу. Метод WTMM для всієї моделі дає  $\alpha_{\min} = 0.34$ ,  $\alpha_{\max} = 3.99$ ,  $\Delta\alpha = 3.65$ ,  $\alpha^* = 1.83$ ,  $K_f = 0.37$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.99$ . Натомість метод MF DFA показує (рис. 3.5), що для монофрактальної частини ( $D = 1.5$ ) при  $t \in [0.5, 4.2]$  маємо  $\alpha_{\min}(t) = 0.35$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 0.41$ ,  $\Delta\alpha(t) = 0.06$ ,  $\alpha^*(t) = 0.40$ ,  $K_f(t) = -1.0$ ,  $f_\alpha(t) = 1.0$ , а для нефрактальної частини при  $t \in [5.8, 9.5]$  –  $\alpha_{\min}(t) = 2.00$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 3.00$ ,  $\Delta\alpha(t) = 1.00$ ,  $\alpha^*(t) = 2.15$ ,  $K_f(t) = 1.9$ ,  $f_\alpha(t) = 1.0$ . У середній частині ( $t \in [4.2, 5.8]$ )  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  зростають приблизно за лінійним законом. Важливо, що формально мультифрактальний

спектр нефрактальної частини має форму, схожу з тією, яка спостерігається для МФС, але його числові характеристики дуже далеко виходять за межі умов фрактальності ( $0 < \alpha^*(t) < 1$ ). Нефрактальність на часо-частній площині (рис. 3.5, ж) відображається у зникненні деревоподібної структури, характерної саме для фракталів. Аналогічні результати отримано також для моделі 4а (рис. 3.6).

Модель 5 (рис. 3.7, а), яка демонструє МФС, складений з двох монофрактальних компонент, для котрих відношення амплітуд у часі змінюється від 0 до  $\infty$ , є особливою, оскільки у кожен момент часу присутні обидві компоненти. Метод WTMM, що не враховує часового розташування компонент, дає  $\alpha_{\min} = 0.31$ ,  $\alpha_{\max} = 0.87$ ,  $\Delta\alpha = 0.56$ ,  $\alpha^* = 0.44$ ,  $K_f = 1.20$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.23$ . Як вже було сказано у попередньому пункті, більшість із цих параметрів не відрізняється від того, що метод WTMM дає для моделей 2 і 3. Натомість метод MF DFA виявляє, що функції  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  і  $\Delta\alpha(t)$  зростають нелінійно, причому швидкість їх зростання збільшується із часом.

Тепер звернемось до стохастичних моделей 6 – 10.

Модель 6 з  $D = 1.8$ , яка є типовою моделлю монофрактального ФС і для якої метод WTMM дає  $\alpha_{\min} = 0.38$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.39$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.05$ , в методі MF DFA демонструє схожі результати:  $\alpha_{\min}(t) = 0.46$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 0.57$ ,  $\Delta\alpha(t) = 0.11$ ,  $\alpha^*(t) = 0.52$ ,  $K_f(t) = -0.1$ ,  $f_\alpha(t) = 1.0$  (рис. 3.8).

Та сама модель з  $D = 1.2$ , для якої метод WTMM дає  $\alpha_{\min} = 0.84$ ,  $\alpha_{\max} = 0.86$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.85$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 0.94$ ,  $\mu_\alpha = 0.02$ , в методі MF DFA має такі результати:  $\alpha_{\min}(t) = 0.70$ ,  $\alpha_{\max}(t) = 1.12$ ,  $\Delta\alpha(t) = 0.42$ ,  $\alpha^*(t) = 0.87$ ,  $K_f(t) = 0.2$ ,  $f_\alpha(t) = 1.0$  (рис. 3.9). Тут привертає увагу збільшення ширини спектра, що, скоріш за все, пояснюється особливостями алгоритму генерації стохастичного сигналу та його реакцією на звуження вікна у часовій області.

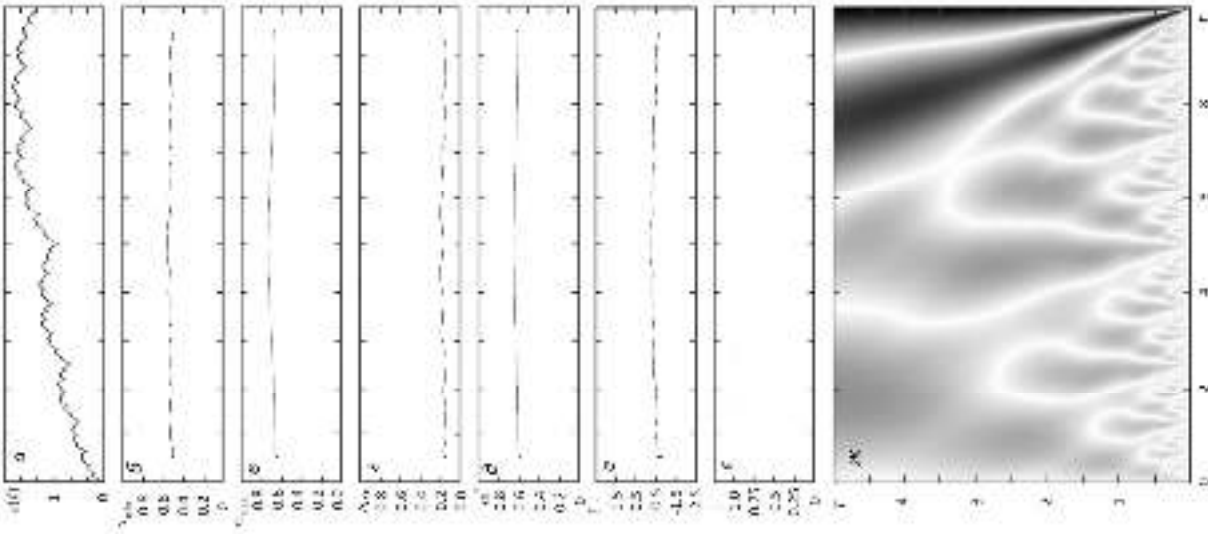


Рисунок 3.2 – Результати аналізу вейвлет-аналізу моделюваного ФС (Молнль. 2). а – вихідний сигнал у часі; б –  $\sigma_{\text{det}}(t)$ ; в –  $\sigma_{\text{det}}(t)$ ; г –  $\Delta \ln \sigma(t)$ ; д –  $\Delta \ln \sigma(t)$ ; е –  $K_1(t)$ ; е –  $\xi_1(t)$ ; ж – ФСТ БВН сигналу (масштаб дБ); з –  $\sigma(t)$ .

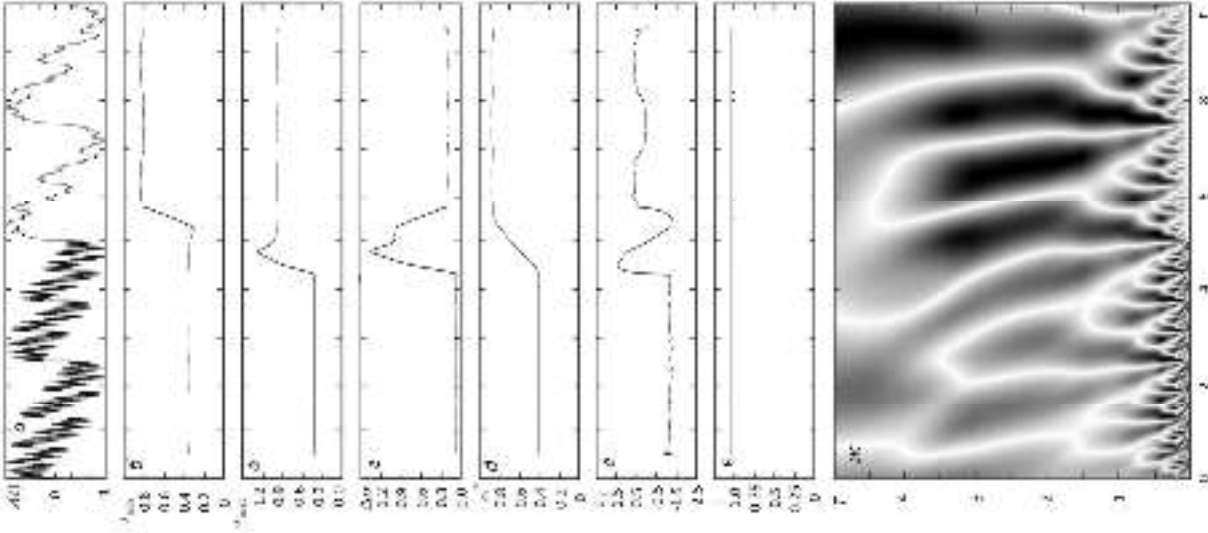


Рисунок 3.3 – Результати аналізу вейвлет-аналізу моделюваного ФС (Молнль. 3).

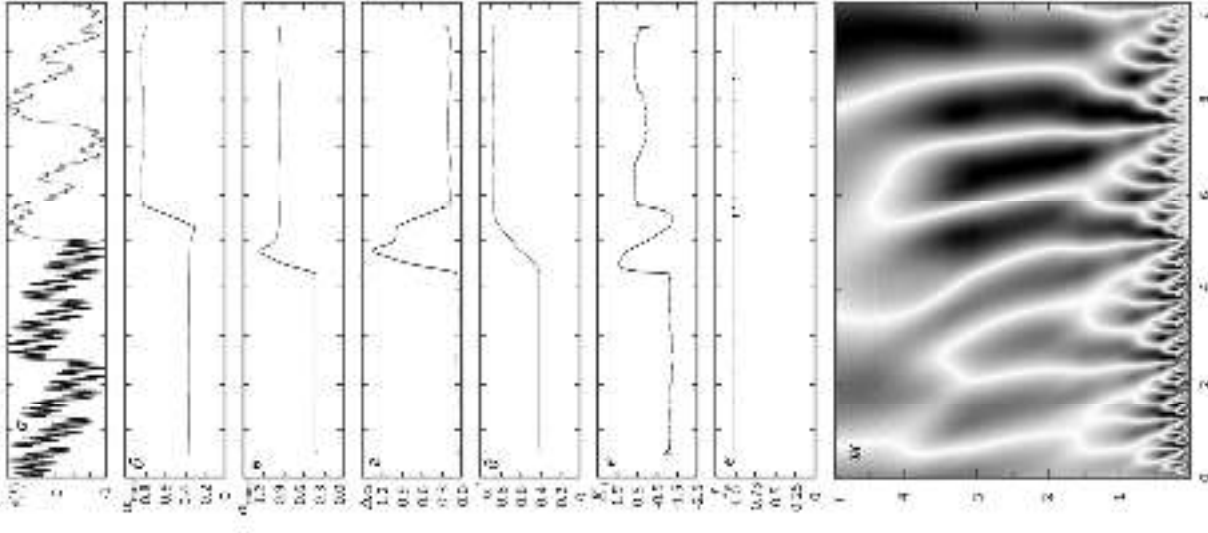


Рисунок 3.4 – Результати аналізу вейвлет-аналізу моделюваного ФС (Молнль. 3).

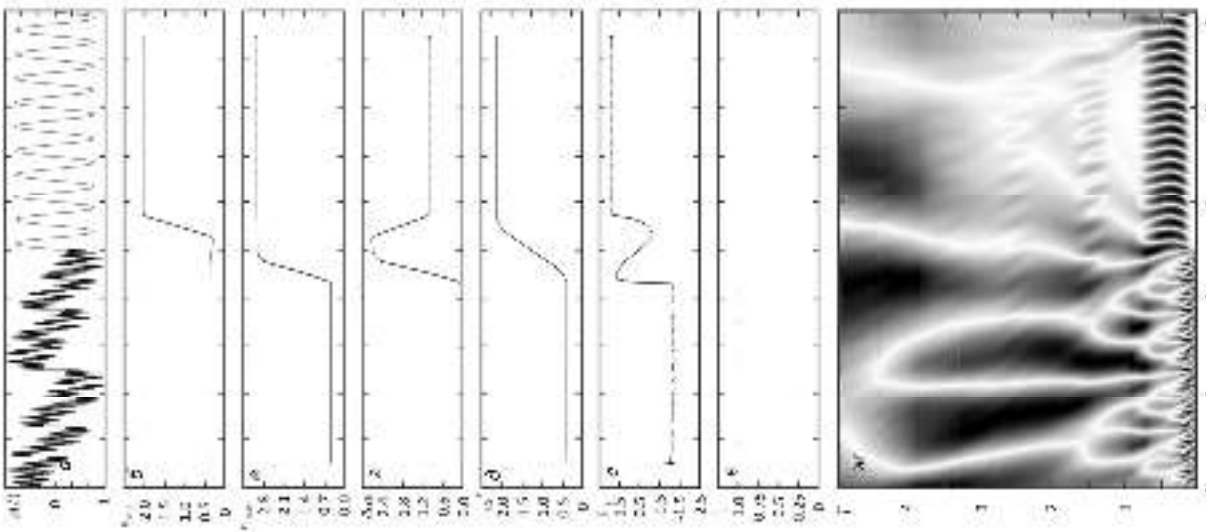


Рисунок 3.5 – Рівняння Шредингера на основі методу розсіювання ФКР (Моделі 4);  $\lambda$  – сигнал у зоні об'єкту,  $\delta = \alpha_{\text{ext}}(t)$ ,  $\mu = \alpha_{\text{ext}}(t)$ ,  $\nu = \Delta\alpha(t)$ ,  $\eta = \alpha'(t)$ ,  $\epsilon = \mathcal{L}_0(t)$ ,  $\omega$  – ФКР БРП об'єкту (нехай  $\text{dB} \ll 1$ ).

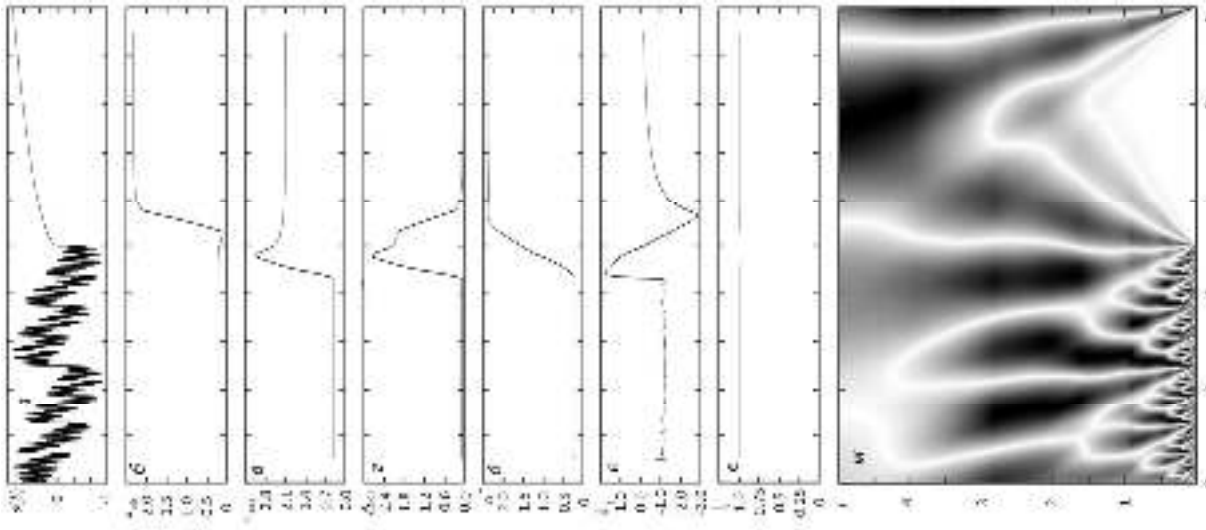


Рисунок 3.6 – Трискані (Моделі 4a)

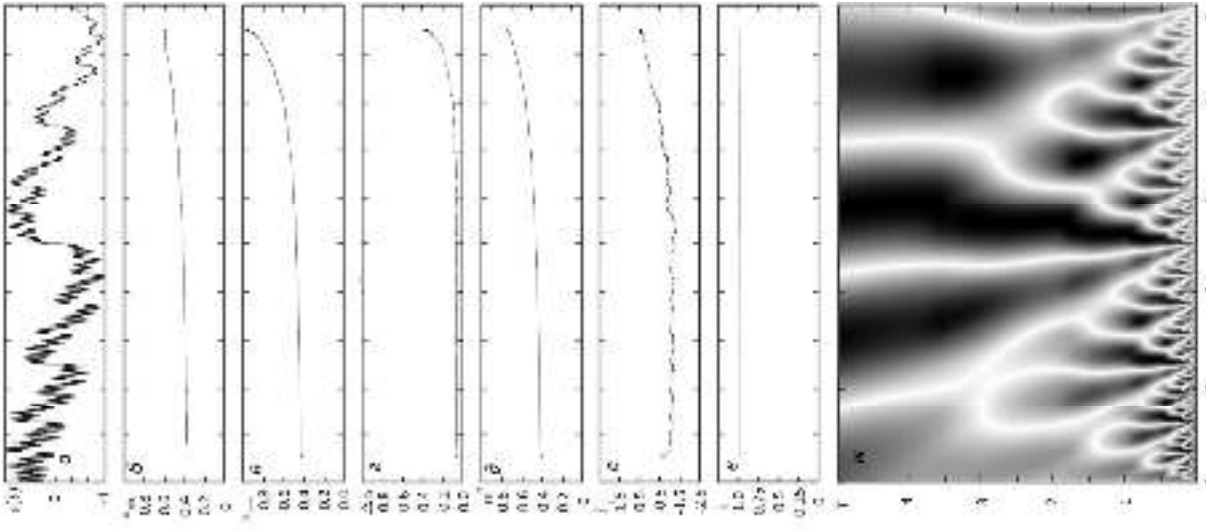


Рисунок 3.7 – Трискані (Моделі 5)

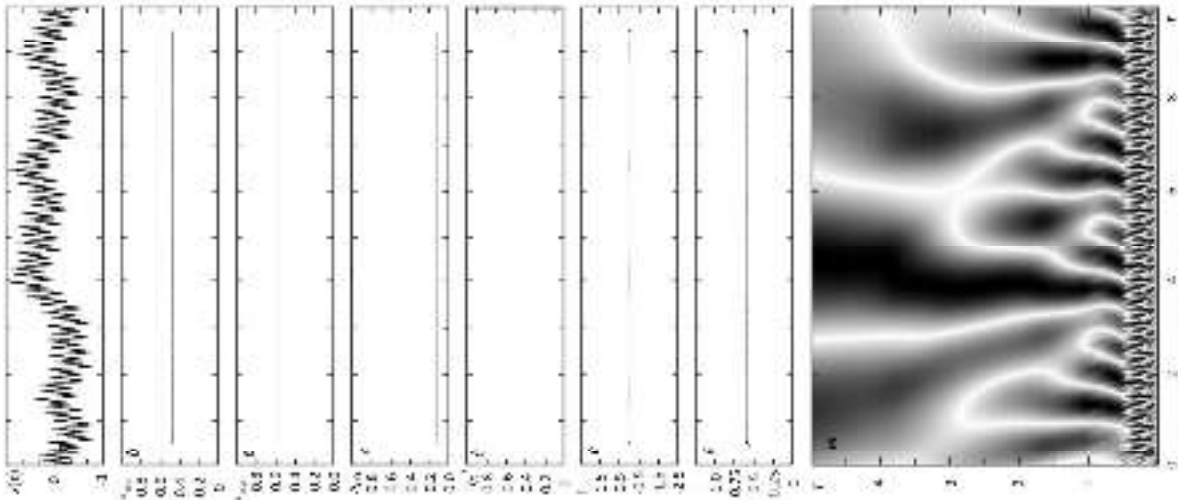


Рисунок 3.8. Результаты мультирешающего анализа модельного ФС (Модель 6,  $D = 8$ ): а – сигнал у входной области, б –  $\sigma_{in}(t)$ , в –  $\sigma_{max}(t)$ , г –  $\Delta\sigma_0(t)$ , д –  $\sigma_1(t)$ , е –  $\Delta\sigma_1(t)$ , ж –  $\sigma_2(t)$ , з –  $\Delta\sigma_2(t)$ , и –  $\sigma_3(t)$ , я –  $\Delta\sigma_3(t)$ , к –  $\sigma_4(t)$  (реализация ФС).

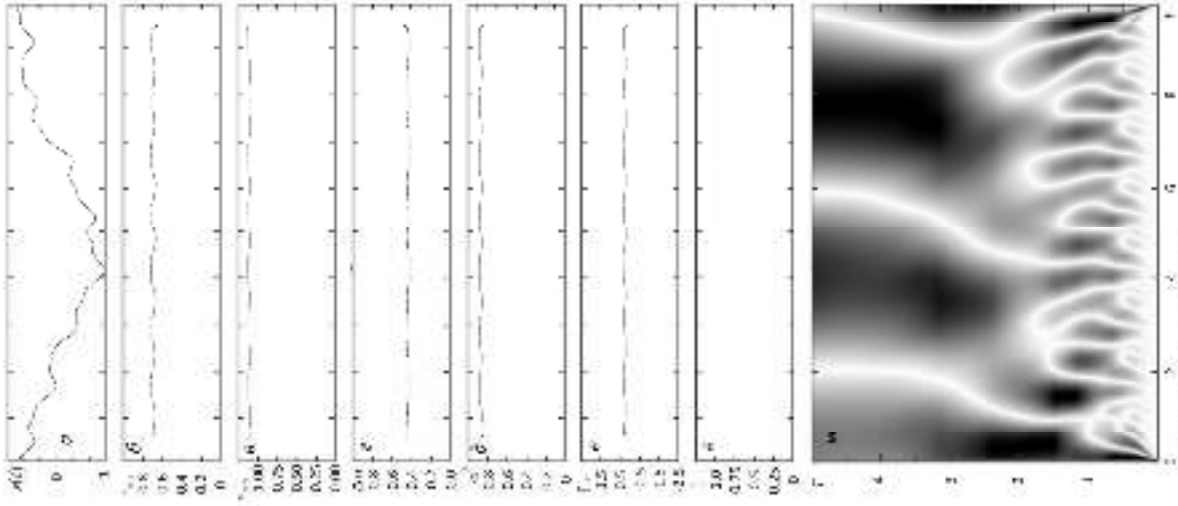


Рисунок 3.9 – То же самое (Модель 6,  $D = 12$ ).

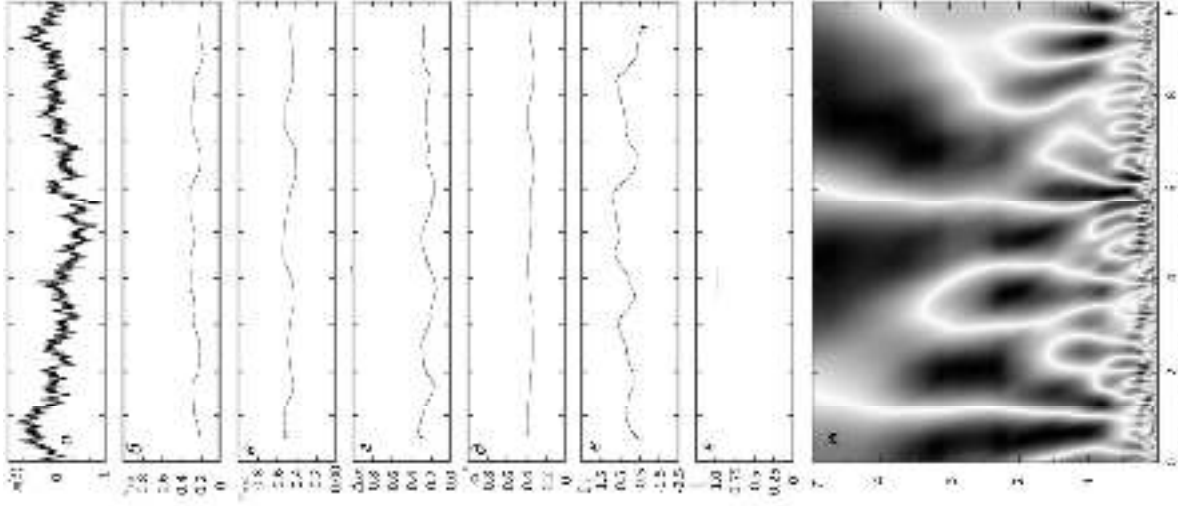


Рисунок 3.10 – То же самое (Модель 7,  $D = 1.8$ ).

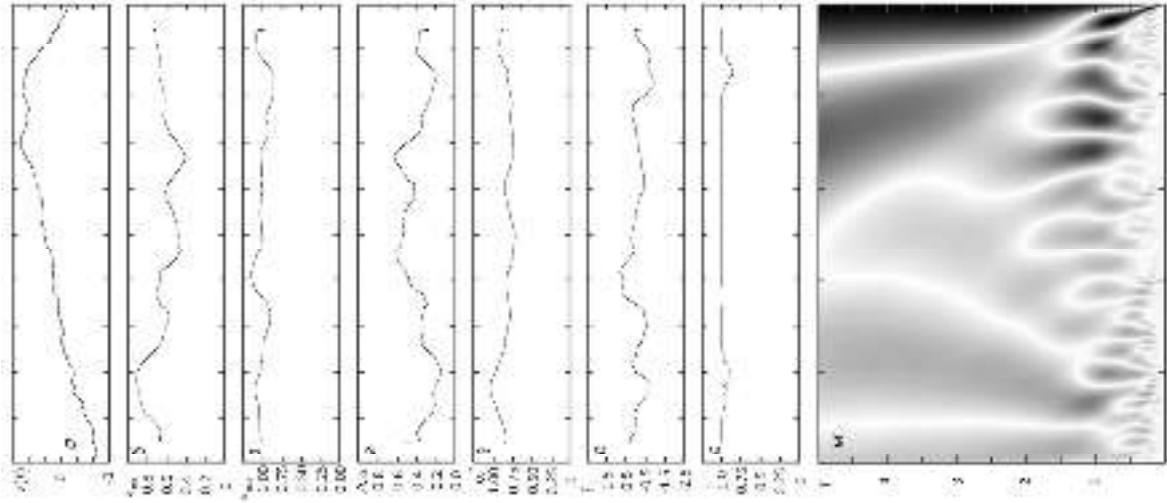


Рисунок 3.11. Результати мултифрактального аналізу часового ряду ФЧС (Мольска 7,  $D = 1.5$ ): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\text{int}}(\delta)$ , в –  $\alpha_{\text{ext}}(\delta)$ , г –  $\Delta \alpha(\delta)$ , д –  $\sigma^2(\delta)$ , е –  $K_1(\delta)$ , є –  $K_2(\delta)$ , ж – ФСТ БПІ сигналу (неймант db-4)

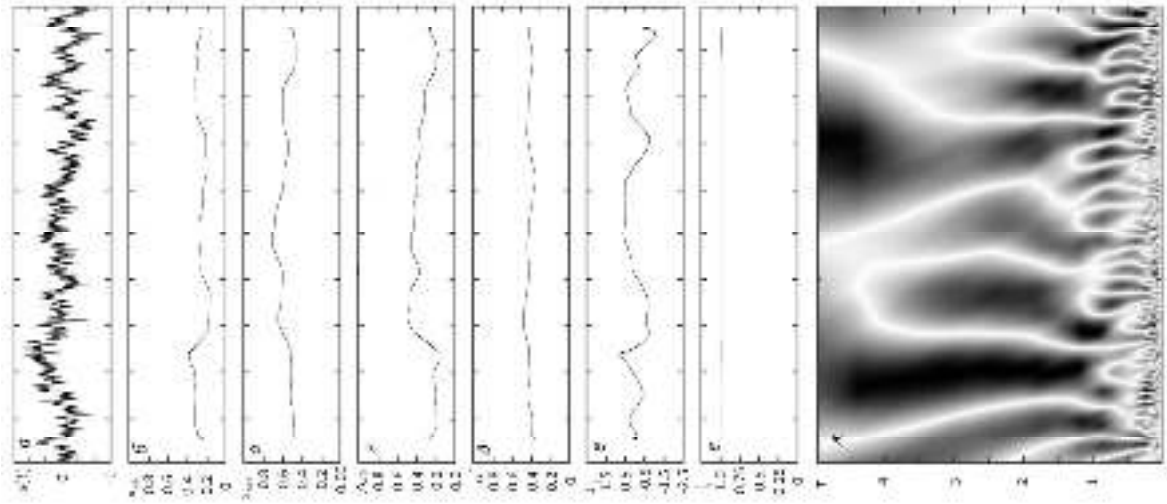


Рисунок 3.12. Тез саме (Мольска 8,  $D = 1.8$ )

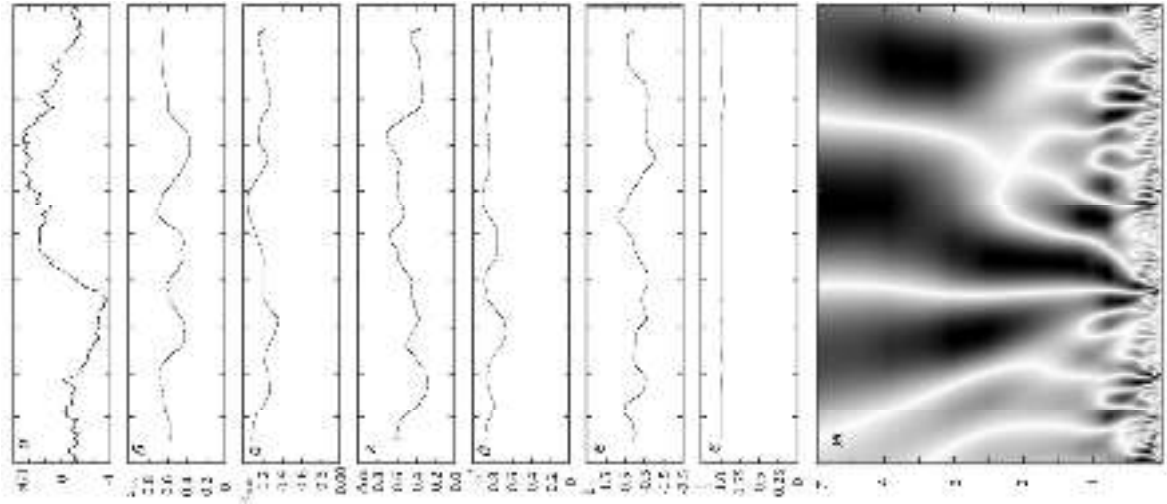


Рисунок 3.13. Тез саме (Мольска 8,  $D = 1.2$ )

Модель 7, що є моделлю мультифрактального сигналу та базується на УБР, показує суттєву часову нестабільність мультифрактальних характеристик як при  $D = 1.8$  (рис. 3.10), так і при  $D = 1.2$  (рис. 3.11). Це є дещо прикритим, бо її не можна рекомендувати у випадках, коли така нестабільність може стати критичною та призвести до «відкриттів» особливостей фрактальної структури, яких там і бути не могло.

Аналогічна неприємна ситуація спостерігається також для моделі 8, що базується на фрактальних шумах (рис. 3.12, 3.10). Скоріш за все, ці проблеми можна певною мірою подолати, якщо використовувати досить велику кількість стохастичних реалізацій із усередненням всіх мультифрактальних числових характеристик по утвореному ансамблю. Але доцільність і можливість використання такого підходу залежатиме від вимог конкретної задачі.

Модель 9, що є моделлю МФС зі спеціальним (лінійним) законом часової зміни показника Гельдера, базується на моделі МБР і демонструє у методі WTMM такі результати:  $\alpha_{\min} = 0.30$ ,  $\alpha_{\max} = 1.20$ ,  $\Delta\alpha = 0.90$ ,  $\alpha^* = 0.65$ ,  $K_f = 0.45$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.38$ , в методі MF DFA показує наступне (рис. 3.14). Функції  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  і  $\Delta\alpha(t)$ , як слід було очікувати, мають тенденцію до зростання за лінійним законом, але в них присутні істотні флуктуації. Функція  $K_f(t)$  флюктує між  $-0.5$  і  $0.5$ , тобто мультифрактальний спектр залишається близьким до симетричного. Функція  $f_\alpha(t)$  в багатьох місцях стає меншою одиниці, тобто у вікні такої ширини фактично реалізація стає близькою до монофрактальної. Особливо це стосується «провалу» на інтервалі  $t \in [1, 2]$ , де також зареєстровано і відповідний «провал» на графіку  $\alpha^*(t)$ .

Модель 10, що є аналогом моделі 9, але з іншим законом часових змін показника Гельдера  $\alpha(t)$  та яка у результаті застосування методу WTMM показала такі результати:  $\alpha_{\min} = 0.31$ ,  $\alpha_{\max} = 1.27$ ,  $\Delta\alpha = 0.96$ ,  $\alpha^* = 0.90$ ,  $K_f = -0.47$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.07$ , в методі MF DFA демонструє наступне (рис. 3.15). Функції



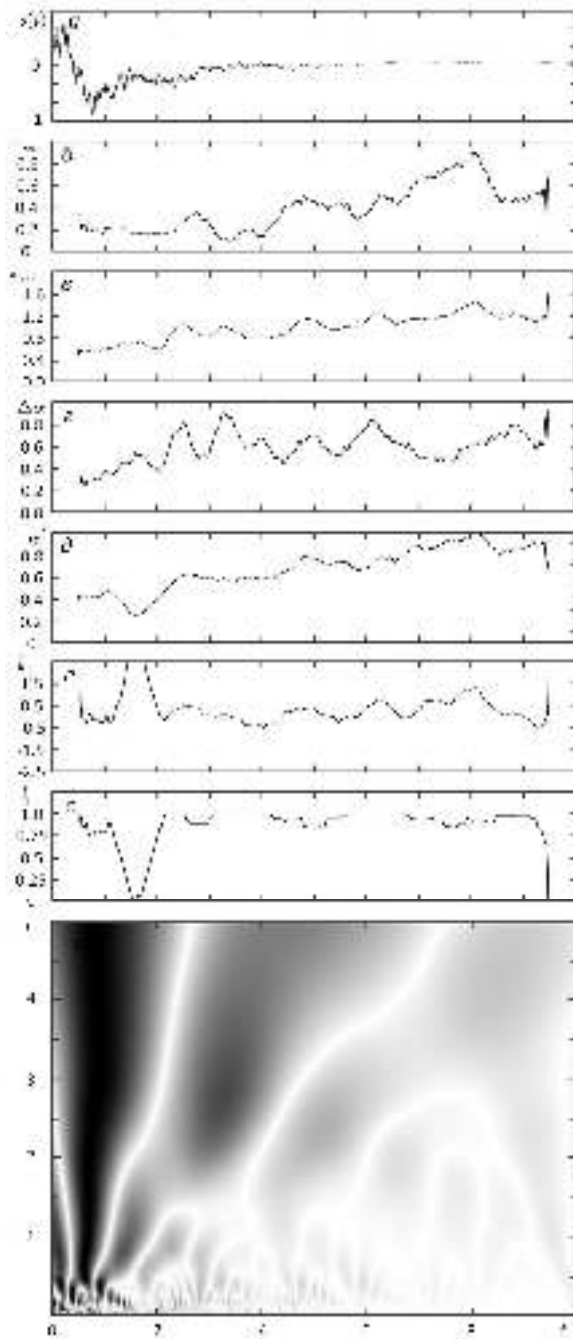


Рисунок 3.14 – Результати мультифрактального аналізу модельного ФС (Модель 9): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $K_f(t)$ , є –  $f_\alpha(t)$ , ж – ФСГ БВП сигналу (вейвлет db4).

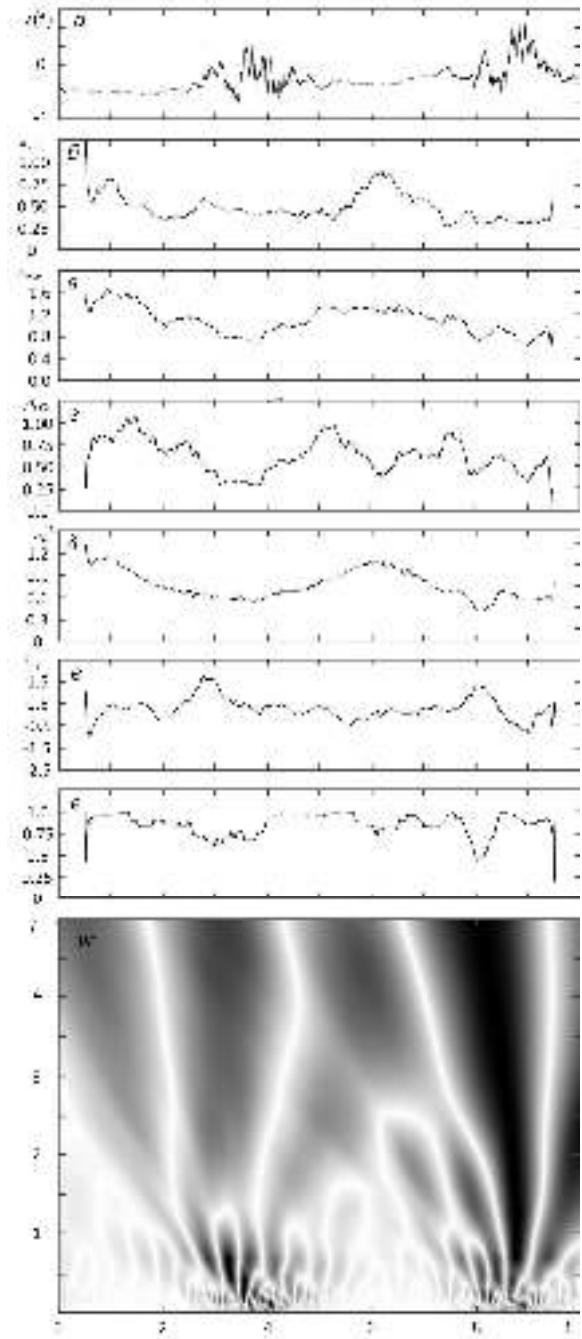


Рисунок 3.15 – Те ж саме (Модель 10).

$\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\alpha^*(t)$  і  $\Delta\alpha(t)$  в цілому повторюють два періоди змін показника Гельдера за гармонічним законом, хоча оцінки  $\alpha^*(t)$  виявляються дещо завищені.

ними, до того ж нелінійним чином, причому для менших значень  $\alpha$  зсув виявляється більшим. Функція  $K_f(t)$  також «відстежує» ці зміни, але у протифазі. Функція  $f_\alpha(t)$  поблизу мінімумів  $\alpha(t)$  демонструє перехід до монофрактального режиму.

І нарешті модель ФНШС сигналу  $FUWB_{1.5}(t)$  з  $D = 1.5$ , для якої метод WTMM дає  $\alpha_{\min} = 0.55$ ,  $\alpha_{\max} = 0.57$ ,  $\Delta\alpha = 0.02$ ,  $\alpha^* = 0.56$ ,  $K_f = 0.0$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 0.04$ , в методі MF DFA демонструє близькі результати. Окремого рисунку для них ми створювати не стали, оскільки вони вже, по суті, містяться на рис. 3.6 при  $t \in [0, 4.2]$ , оскільки саме ця модель і є першою частиною моделі 4.

Тепер на основі результатів мультифрактального аналізу модельних сигналів, отриманих з використанням методів WTMM і MF DFA, необхідно зробити певні висновки для різних видів сигналів, які, сподіваємося, будуть цікавими та корисними для практиків. Такими видами на разі є монофрактальні, мультифрактальні та нефрактальні сигнали.

### 3.3. Мультифрактальний аналіз монофрактальних сигналів

Моделями монофрактальних сигналів у нас є моделі 1 (детермінована), 6, 7 і 8 (всі три – стохастичні). За результатами їх мультифрактального аналізу можна зробити наступні висновки.

1. На відміну від теоретичних положень, отриманих для математичних фракталів, під час мультифрактального аналізу модельних монофрактальних сигналів, що належать до фізичних фракталів, мультифрактальний спектр не колапсує у точку. Це пов'язано, насамперед, з тим, що модельний сигнал має вектор даних скінченної довжини, а тому як і у будь-якого фізичного фрактала, фрактальні властивості існують лише у обмеженому з обох боків діапазоні масштабів. Натомість отримані мультифрактальні спектри є досить вузькими, добрим індикатором чого виступає показник відносної ширини мультифрактального спектру  $\mu_\alpha$ . Для монофракталь-

них сигналів він зазвичай задовольняє умові  $\mu_\alpha \ll 1$ . Для математичного монофракталя, зрозуміло, ми отримаємо  $\mu_\alpha = 0$ . Сказане є справедливим як у глобальному (метод WTMM), так і у локальному (метод MF DFA) сенсі.

2. Як глобальні, так і локальні отримані оцінки узагальненого показника Херста виявляються дещо завищеними для всіх моделей. Отже, відповідні оцінки фрактальної розмірності, у відповідності до цього, стають заниженими.

3. Параметр  $f_\alpha$  не завжди своїм зменшенням відносно одиниці вказує на монофракทัลність сигналу. Скоріш за все, причина – та сама, що описана у першому висновку.

4. Стохастичні моделі (моделі 6 – 8) у порівнянні з детермінованою (модель 1) на окремих реалізаціях у цілому показують гірший результат у сенсі стабільності мультифрактальних характеристик. Однак це можна покращити створенням великого набору цих випадкових реалізацій із наступним усередненням за ансамблем.

5. Шукаючи на часових графіках мультифрактальних характеристик перехід досліджуваного сигналу у монофрактальний режим, у першу чергу слід співставляти графіки функцій  $f_\alpha(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\mu_\alpha(t)$ . Те, що перша від них не відхилилася від одиниці, ще не заперечує монофракทัลності. На практиці виконання умов  $\Delta\alpha \leq 0.2$  і  $\mu_\alpha \leq 0.25$  є вагомішими. Більш того, може виникнути ситуація на кшталт тієї, що спостерігається на рис. 3.14 навколо точки  $t = 1.5$ . Тут є суттєвий «провал» на графіку  $f_\alpha(t)$  (рис. 3.14,  $\epsilon$ ), але  $\mu_\alpha(t) > 1$ , тому про монофрактальний режим не йдеться.

### 3.4. Мультифрактальний аналіз мультифрактальних сигналів

Мультифрактальний аналіз МФС відбувався з використанням моделей 2, 3, 5 (детерміновані) і моделей 9, 10 (стохастичні). Основні отримані за їх допомоги результати є такими.

1. Моделі мультифрактальних сигналів можуть істотно відрізнитися одна від одної у сенсі поведінки мультифрактальних характеристик у часі. Все залежить від

того, як саме монофрактальні складові розташовано у сигналі. Вони можуть змінювати одна одну стрибком (модель 2), поступово (моделі 3, 9, 10), або взагалі існувати одночасно із різним відношенням амплітуд (модель 5). Але всі вони у глобальному сенсі є мультифрактальними сигналами.

2. Метод WTMM, що досліджує глобальні мультифрактальні характеристики МФС, у випадку, коли різні за часовою фрактальною структурою моделі мають однаковий діапазон використаних значень показника Гельдера, дає для них фактично однакові результати та не дозволяє впевнено відрізнити одну від одної. Отже, обмежувати мультифрактальний аналіз виключно методом WTMM є недоцільним.

3. Локальні мультифрактальні характеристики МФС у межах часового вікна скінченної довжини, що використовується у методі MF DFA, можуть бути як майже монофрактальними (модель 2 у зонах, коли до вікна потрапляє тільки одна монофрактальна складова), близькими до монофрактальних (модель 3, частина моделі 5, деякі інтервали моделей 9 і 10), так і повністю мультифрактальними (середня зона моделі 2, друга частина моделі 5, інша частина інтервалів моделей 9 і 10). Виявлення таких інтервалів є дуже корисним під час аналізу експериментальних даних.

3. Узагальнений показник Херста  $\alpha^*(t)$  в методі MF DFA є досить добрим індикатором часової поведінки фрактальних особливостей досліджуваного сигналу. Результати аналізу показують, що він досить добре віддзеркалює часову поведінку показника Гельдера  $\alpha(t)$ , що застосовувався під час створення самих модельних сигналів. Більш того, він добре корелює з часовими змінами показника Херста  $H(t)$ , що застосовується у монофрактальному аналізі.

4. Коефіцієнт асиметрії функції мультифрактального спектру, що відображає відхилення досліджуваного зразка спектру від симетрії, також часто є корисним. Наприклад, методі WTMM саме він дозволяє відрізнити модель 5 від моделей 2 і 3, оскільки решта мультифрактальних характеристик у цьому випадкові приймають майже однакові значення.

### 3.5. Мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів

Мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів здійснювався з використанням моделей 4 і 4а. Отже, встановлено наступне.

1. Метод WTMM, реагуючи на наявність нефрактальної гармонічної компоненти в моделі 4 (рис. 3.1, г), створює аномально широкий ( $\mu_\alpha \approx 2$ ) мультифрактальний спектр, положення максимуму ( $\alpha^* = 1.83$ ) якого істотно порушує умови фрактальності ( $0 < \alpha^* < 1$ ). Тобто гармонічна компонента веде себе як складова з  $\alpha_0 > 2$ . В цілому це здається дещо дивним, оскільки добре відомо, що гладка функція повинна мати  $\alpha_0 = 1$ . Джерелом проблем не є періодичність функції, як про це було сказано у роботі [177], де обґрунтовувалася необхідність видалення гармонічних трендів для проведення мультифрактального аналізу. Ми встановили, що заміна періодичної функції на неперіодичну (модель 4а) зовсім не впливає на отримуваний результат. До речі, це пояснює, чому в інших роботах (див., наприклад, [183]) є поради взагалі усувати будь-який тренд з використанням поліноміальної апроксимації.

2. Метод MF DFA демонструє, що мультифрактальний спектр чисто гармонічного сигналу без будь-яких інших домішок (рис. 3.5) (модель 4 при  $t \in [5.8, 9.5]$ ) сам по собі є досить широким ( $\Delta\alpha(t) = 1.00$ ,  $\mu_\alpha \approx 0.5$ ) і асиметричним ( $K_f(t) = 1.9$ ), до того ж максимум зсунуто ліворуч. Узагальнений показник Херста виявляється екстримально великим ( $\alpha^*(t) = 2.15$ ). Заміна періодичної функції на неперіодичну (модель 4а) призводить фактично лише до зміни напрямку нахилу мультифрактального спектру (рис. 3.6).

3. У разі наявності в аналізованому сигналі адитивної суміші фрактальної та нефрактальної компонент, негативний вплив нефрактальної компоненти істотно зменшується, особливо коли її амплітуда є меншою порівняно з амплітудою фрактальної компоненти.

4. Найбільшу ширину мультифрактального спектру в методі MF DFA для обох моделей (моделі 4 і 4а) має середня зона ( $t \in [4.2, 5.8]$ ), до того ж ширина

зростає по мірі того, як все більша кількість відліків нефрактального сигналу потрапляє до аналізуючого вікна у часовій області.

5. На нашу думку, існуючі поради усувати з аналізованого сигналу всі тренди (як періодичні, так і неперіодичні) є дещо категоричними. Зробити це, дійсно, можна, наприклад, з використанням поліномів або фур'є- чи вейвлет-фільтрації. Різноманітних засобів для цього сьогодні вистачає. Але дослідник має бути впевнений, що усунувши тренд, він не знищить сам досліджуваний процес. Наведемо відповідний приклад. Розглянемо модель ФНШС сигналу  $FUWB_1$ , що базується на функції Вейерштраса (рис. 2.11, б). Легко побачити, що її можна апроксимувати, наприклад, двопелюстковим нефрактальним НШС сигналом (рис. 2.11, а). А після цього видалити такий тренд. Чим буде те, що ми отримаємо у результаті, сказати важко, але точно не ФНШС сигналом. Звідси висновок: відповідальність за те, що у кожному випадку вважати трендом, а що – корисним сигналом, лежить на дослідникові. Тут можуть сказати, що це збільшує суб'єктивність результатів аналізу. Це насправді так. Але фрактальний і мультифрактальний аналізи самі по собі, подібно до будь-якого виду спектрального аналізу, дійсно є суб'єктивними по своїй природі.

### 3.6. Метод коригуючої функції для мультифрактального аналізу

У попередніх підрозділах, присвячених мультифрактальному аналізу модельних сигналів, багато разів зазначалося, що узагальнений показник Херста  $\alpha^*$  майже завжди видає явно завищену оцінку для кожного модельного сигналу. Це перегукується з результатами монофрактального аналізу тих самих модельних сигналів і процесів, що проведено у Розділі 2. Нагадаємо, що там теж кожен метод монофрактального аналізу давав зсунуту оцінку фрактальної розмірності  $D$  модельного сигналу, коли її точне значення було відомо заздалегідь.

У підрозділі 2.4 для усунення цього було запропоновано метод КФ. Там же продемонстровані основна ідея та математичне обґрунтування методу КФ. Але це був метод КФ для монофрактального аналізу.

Вважаємо, що аналогічну ідею варто використати і в іншому випадку, тобто розглянути метод КФ для мультифрактального аналізу. Це було запропоновано А. А. Онищенком, О. В. Лазоренком і Л. Ф. Черногором в 2022 р. у роботі [25].

Основна ідея полягає у наступному. Для заданого методу мультифрактального аналізу отримувана оцінка  $\hat{\alpha}$  значення узагальненого показника Херста  $\alpha^*$  є невідомою нелінійною функцією показника Гельдера сигналу  $\alpha$  і кількості відліків аналізованого сигналу  $N$ , тобто  $\hat{\alpha} = F(\alpha, N)$ . В ідеальному випадку (якого, на жаль, не існує) ця залежність мала би бути лінійною за першою змінною та зовсім не залежати від другої змінної, тобто  $\hat{\alpha} = \alpha$ . Але на практиці залежність завжди є нелінійною. Причини цього криються, скоріш за все, у особливостях алгоритму кожного методу мультифрактального аналізу.

Через обмеження у обсязі даної роботи окремо співвідношення для метода КФ для мультифрактального аналізу наводити не будемо. Зауважимо тільки, що вони елементарно отримуються із формул (2.11) – (2.21) формальною заміною фрактальної розмірності  $D$  на узагальнений показник Херста  $\alpha^*$ .

Отже, в результаті корегування положення максимуму мультифрактального спектра  $\alpha^*$  відбувається його паралельний перенос. Тому відповідних змін зазначають  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$  і  $\mu_\alpha$ . Величини ж  $\Delta\alpha$  і  $K_f$  залишаються незмінними.

Залишається додати, що у наших дослідженнях для побудови КФ методів WTMM і MF DFA ми використовували детерміновану модель монофрактального сигналу – модель 1 (рис. 2.26, а), оскільки вона має найкращу часову стабільність мультифрактальних характеристик із усіх розглянутих нами моделей.

### 3.7. Алгоритм мультифрактального аналізу експериментальних даних

Отже, на основі проведеного мультифрактального аналізу модельних ФС і МФС пропонується наступний алгоритм мультифрактального аналізу експериментальних даних.

1. Видалення трендів із аналізованого сигналу. Грунтуючись на зовнішніх відносно мультифрактального аналізу відомостях, прийняти рішення, що у даному

разі вважати трендом, а що – невід’ємною частиною аналізованого сигналу. Тренд видалити з використанням відомих методів апроксимації та фільтрації.

2. Застосування до досліджуваного сигналу методу WTMM. Оскільки він застосовується одразу до всієї реалізації, це дозволяє дослідити глобальні мультифрактальні властивості сигналу. У якості числових характеристик рекомендується використовувати такий набір:  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $\alpha^*$ ,  $K_f$ ,  $f_\alpha$ ,  $\mu_\alpha$ .

3. Застосування до досліджуваного сигналу методу MF DFA. Оскільки у переважній більшості аналізовані сигнали є суттєво нестационарними у сенсі фрактальних властивостей, вкрай рекомендується використання методу MF DFA. Рекомендований набір часових функцій числових характеристик складають  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$ ,  $\alpha^*(t)$ ,  $K_f(t)$ ,  $f_\alpha(t)$ , а за необхідності – й  $\mu_\alpha(t)$ . Особливо радимо застосовувати ФСГ БВП, оскільки картина часо-часового вмісту аналізованого сигналу дуже часто вносить багато пояснень до часової поведінки перелічених вище характеристик. Вибір аналізуючого вейвлету не є критичним, а тому залишається на смак дослідника.

4. Наполегливо рекомендується використання методу КФ для корегування результатів обох методів. Певним обмеженням може виступати лише потреба попередньої побудови коригуючої функції для кожного конкретного методу, але це треба зробити тільки один раз.

5. Для формулювання підсумкових результатів аналізу мультифрактальних властивостей досліджуваного сигналу або процесу обов’язковим є порівняння результатів, отриманих на попередніх кроках алгоритму.

### 3.8. Висновки до третього розділу

1. Запропоновано нові числові характеристики, що є корисними для проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, обґрунтовано доцільність їх створення, продемонстровано корисність та ефективність. До них належать коефіцієнт асиметрії функції мультифрактального спектру, показник відносної ширини мультифрактального спектру та розмірність носія мультифракталу.



2. Із використанням методів WTMM і MF DFA проведено мультифрактальний аналіз набору модельних ФС і МФС. Виявлено особливості мультифрактального аналізу монофрактальних, мультифрактальних і нефрактальних сигналів і процесів, сформульовано відповідні рекомендації для практиків. Розроблено зручні формати представлення результатів аналізу.

3. Встановлено, що під час переходу МФС до монофрактального режиму функція мультифрактального спектру фізичного фракталу не колапсує у точку, як це має відбуватися у теорії для математичного фракталу. Натомість ознаками появи такого переходу є зменшення  $\Delta\alpha$  і  $\mu_\alpha$ , а також виконання умови  $f_\alpha < 1$ . Результати моделювання свідчать, що на практиці режим вже можна вважати монофрактальним, якщо  $\Delta\alpha \leq 0.2$  і  $\mu_\alpha \leq 0.25$  навіть коли  $f_\alpha = 1$ .

4. Продемонстровано, що мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів призводить до появи мультифрактальних спектрів із аномальними значеннями мультифрактальних характеристик. По-перше, такі спектри суттєво порушують умови фрактальності ( $0 < \alpha^* < 1$ ) для узагальненого показника Херста, який завжди для них  $\alpha^* > 1$ . По-друге, вони також виявляються дуже широкими ( $\Delta\alpha \geq 1$ ), а сам нефрактальний сигнал у мультифрактальному спектрі формально поводить себе як монофрактальна складова з  $\alpha_0 > 1$ .

5. Доведено на практичних прикладах, що існуючі в літературі поради усувати з аналізованого сигнала всі тренди (як періодичні, так і неперіодичні) є дещо категоричними. Дослідник має бути впевнений, що усунувши тренд, він не знищить сам досліджуваний процес, оскільки тренд може виявитись невід'ємною частиною досліджуваного процесу. Прикладом цього є ФНШС процес. Відповідальність за те, що саме у кожному конкретному випадку вважати трендом, а що – корисним сигналом, лежить на самому дослідникові. Збільшення суб'єктивності результатів аналізу наразі не є загрозою, оскільки фрактальний і мультифрактальний аналізи самі по собі, подібно до будь-якого виду спектрального аналізу, дійсно є суб'єктивними за власною природою.

6. Встановлено, що оцінки  $\hat{\alpha}$  однієї з найважливіших мультифрактальних характеристик – узагальненого показника Херста  $\alpha^*$ , що отримуються як методом WTMM, так і методом MF DFA, є завищеними (у діапазоні  $\alpha = 0.2 - 0.8$  відхилення  $\hat{\alpha}$  від істинного значення  $\alpha$  складає  $90 \div 5 \%$ ), що негативним чином впливає на результати мультифрактального аналізу реальних сигналів і процесів. Продемонстровано, що функціональна залежність  $\hat{\alpha} = F(\alpha)$  є нелінійною для обох аналізованих методів. Більш того, виявлена також залежність величини  $\hat{\alpha}$  від кількості точок дискретного вектора даних аналізованого сигналу  $N$ , тобто у результаті маємо  $\hat{\alpha} = F(\alpha, N)$ .

6. Із метою покращення точності оцінки мультифрактальних характеристик створено метод КФ для мультифрактального аналізу. Його застосування дозволило істотно знизити відхилення отримуваної оцінки узагальненого показника Херста від істинної відомої величини показника Гельдера аналізованого сигналу. Так, за мінімальної дозволеної кількості дискретних відліків даних аналізованого сигналу ( $N_{\min} = 32$ ) у діапазоні  $\alpha = 0.2 - 0.8$  відхилення скоригованого значення узагальненого показника Херста від істинного значення  $\alpha$  складає лише  $8 \div 3 \%$ , а саме істинне значення  $\alpha$  стабільно потрапляє у середину довірчого інтервалу (рівень надійності складає 0.9).

7. Розроблено й обґрунтовано новий алгоритм проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, який рекомендується для спеціалістів-практиків.

## РОЗДІЛ 4.

### АНАЛІЗ СИГНАЛІВ У ЗАДАЧАХ РАДІОФІЗИКИ ГЕОКОСМОСУ

Наукові результати, що розглядаються у даному розділі, містяться у роботах автора [14 – 18, 20 – 29].

#### 4.1. Аналіз гравітаційної хвилі

##### 4.1.1. Загальна інформація

Безперечно, одним із найзначущих відкриттів ХХІ сторіччя є експериментальна реєстрація гравітаційних хвиль. Це відбулося 14 вересня 2015 р. о 09:50:45 UTC, коли два детектори Лазерної Інтерферометричної Обсерваторії гравітаційних хвиль LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory), розташовані у м. Хенфордї та м. Лівінгстонї (США), вперше в історії людства одночасно зафіксували сигнали гравітаційних хвиль [184].

Теоретично можливість існування гравітаційних хвиль була передбачена ще сторіччя тому у фундаментальних роботах А. Ейнштейна [185, 186] і К. Шварцшильда [187], але експериментального підтвердження цієї здогадки до цього часу не існувало. На нашу думку, тут спостерігається повна аналогія з відкриттям іншого виду хвиль – електромагнітних хвиль, коли видатне теоретичне відкриття Р. Максвелла на роки передувало експериментальному підтвердженню Г. Герца.

Джерелом сигналу гравітаційних хвиль був процес злиття двох чорних дір, у результаті якого виникла одна чорна діра [184]. Цей процес відрізнявся екстримальними потужністю й енергією та є унікальним НШС процесом, що підтверджується результатами системного спектрального аналізу (ССА) [188]. Більш того, система цих двох чорних дір є відкритою, нелінійною динамічною системою, в якій діє потужне нестационарне джерело енерговиділення. Тому у відповідності до нелінійної та системної парадигм (див., наприклад, [3 – 5]) процеси у такій системі можуть належати не просто до НШС процесів, а й бути ФНШС процесами. Саме задля дослідження цього авторами проведено фрактальний і мультифрактальний аналізи сигналів гравітаційних хвиль у роботах [14 – 16].

#### 4.1.2. Результати фрактального аналізу

Раніше (до досліджень автора дисертації) із використанням методу ССА до проведення фрактального аналізу в роботі [188] було встановлено наступне.

Перша реєстрація гравітаційної хвилі (Хенфорд) містить у власному складі НШС процес зі змінною середньою частотою (ЗСЧ НШС процес), який має тривалість приблизно  $\tau \approx 130$  мс, діапазон періодів збурень  $T \approx 4 - 30$  мс, динамічний показник широкосмуговості, що змінюється від 0.4 до 0.9, середню частоту сигналу, яка зростає за гіперболічним законом, та розподіл енергії сигналу з максимумом на  $T_0 \approx 20$  мс.

Друга реєстрація гравітаційної хвилі (Лівінгстон) містить ЗСЧ НШС процес, який має тривалість приблизно  $\tau \approx 120$  мс, діапазон періодів  $T \approx 4 - 30$  мс, динамічний показник широкосмуговості, що змінюється від 0.5 до 0.8, середню частоту сигналу, що зростає за гіперболічним законом, та розподіл енергії сигналу з максимумом на  $T_0 \approx 20$  мс.

У рамках фрактального аналізу авторами у роботах [14, 15] використовувалися оцінка херстової розмірності  $D_H$  (див. пункт 1.3.2), що у межах моделі УБР пов'язана з показником Херста  $H$  простим співвідношенням  $D_H = 2 - H$  як для всього сигналу, так і у ковзаючому вікні. Оцінка показника Херста відбувалася класичним методом нормованого розмаху (див. параграф 1.6). Крім того, використовувався якісний аналіз структури скелетона модуля СФ БВП досліджуваних сигналів (див. пункт 2.2.2).

Отже, в результаті застосування даних методів фрактального аналізу встановлено наступне. На рис. 4.1 наведено зовнішній вигляд аналізованих сигналів в часовій області, які отримано відповідно у Хенфорді (рис. 4.1, а) та Лівінгстоні (рис. 4.1, е). Одна поділка на безрозмірній осі часу відповідає 21 мс. Таким чином, тривалість всієї реєстрації складає 210 мс. У той же час одна поділка уздовж осі відносного розтягнення складає  $5 \cdot 10^{-22}$ .

Херстова розмірність  $D_H$  першого сигналу (Хенфорд) в цілому дорівнює  $D_H \approx 1,45 \pm 0,10$  в діапазоні безрозмірного часу  $t = 0,156 - 5$ . Для другого сигналу (Лівінгстон (Livingston)) ця величина дорівнює  $D_H \approx 1,44 \pm 0,10$  у тому самому діапазоні безрозмірного часу. Відповідні значення показника Херста  $H$  виявилися рівними  $H \approx 0,55 \pm 0,10$  та  $H \approx 0,56 \pm 0,10$ .

Також підтвердження можливості наявності у аналізованих сигналів фрактальних властивостей надаються скелетони НВП (рис. 4.1, д, и), що в діапазоні безрозмірних періодів  $T \approx 0,1 - 2$  мають добре помітну, характерну для фракталів «деревоподібну структуру». Зазначимо, що для звичайного шуму такої структури не виникає. При отриманні скелетонів для побудови СФ БВП використовувався вейвлет Морле.

Окремо розглянемо результати застосування у рамках фрактального аналізу метода УФА (рис. 4.1) [16], теоретичні основи якого було викладено в підрозділі 2.1. Використовується запропонований там формат представлення даних.

На рис. 4.1, а, е розташовано досліджувані сигнали у часовій області, зареєстровані у Хенфорді та Лівінгстоні відповідно. У другому рядочку (рис. 4.1, б, є) наведено графіки часових залежностей херстових розмірностей  $D_H(t)$ , що обчислено у ковзаючому вікні, яке має ширину  $T_0 = 21$  мс. Вибір саме такої ширини вікна зумовлений результатами застосування методу ССА [188]. У третьому рядочку (рис. 4.1, в, ж) приведено графіки функції  $D_H(T, t)$ , тобто часових залежностей херстової розмірності, що обчислено для різних значень ширини вікна  $T$ . Стрілками показано ті значення  $T$ , для яких наведено функції  $D_H(t)$  у попередньому рядочку. На рис. 4.1, г, з розташовано відповідні часові залежності гелдерової розмірності  $D_{Hl}(t)$ . Видно, що загальні тенденції часових залежностей херстової  $D_H(t)$  та гелдерової  $D_{Hl}(t)$  розмірностей є доволі схожими.

Тут треба пам'ятати, що херстова розмірність за власною природою має глобальну локалізацію, а тому при обчисленні у вікні дещо погіршує власну точність, а гелдерова розмірність з самого початку є точковою.

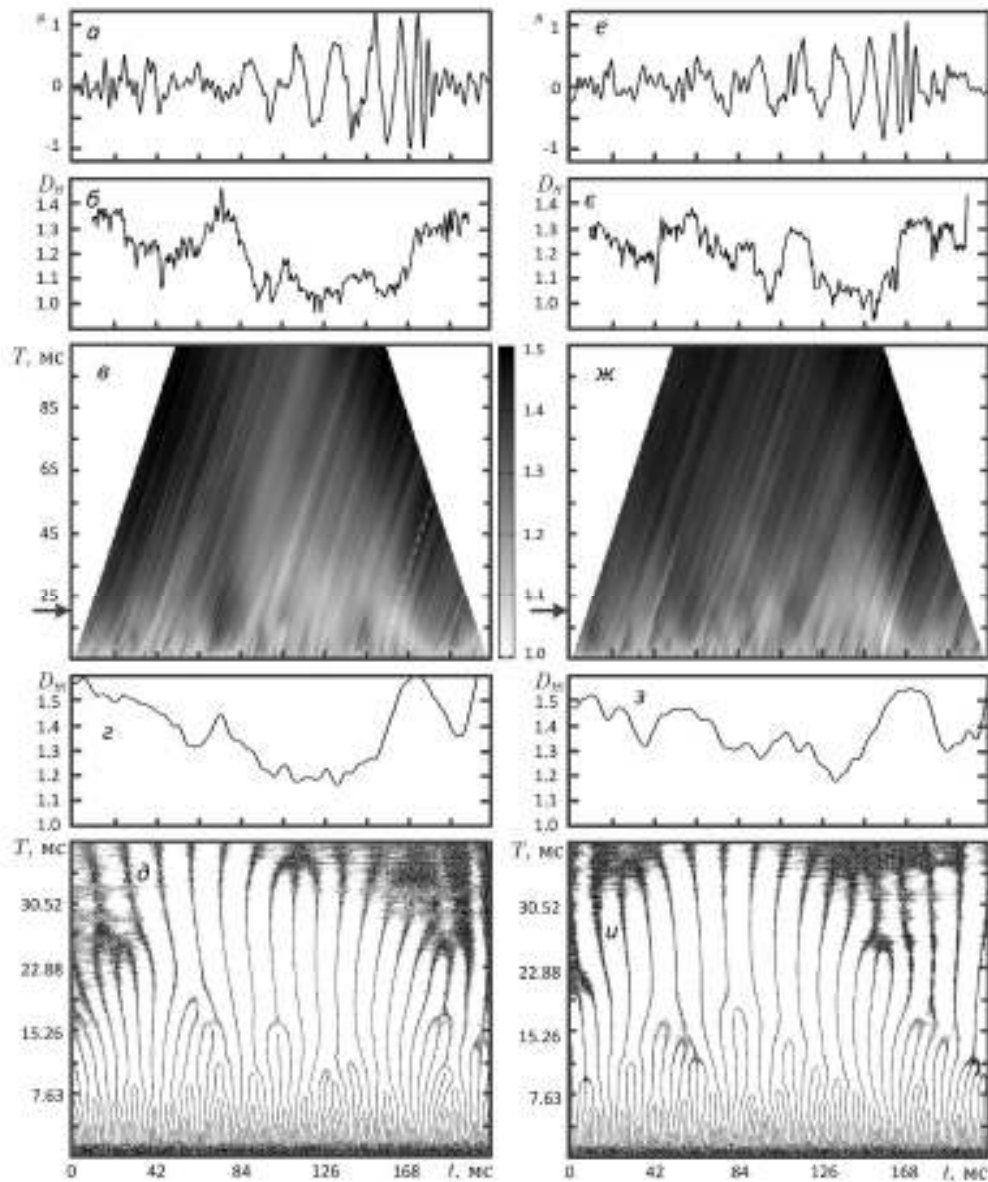


Рисунок 4.1 – Результати застосування метода УФА для аналізу сигналів гравітаційних хвиль, зареєстрованих у Хенфорді (а – сигнал у часовій області  $s(t)$ , б – Херстова розмірність  $D_H(t)$  (ширина вікна  $T_0 = 21$  мс), в –  $D_H(T, t)$ , г – гельдерова розмірність  $D_{Hl}(t)$ , д – скелетон БВП) та Лівінгстоні (е –  $s(t)$ , є –  $D_H(t)$  ( $T_0 = 21$  мс), ж –  $D_H(T, t)$ , з –  $D_{Hl}(t)$ , и – скелетон БВП).

В останньому рядочку (рис. 4.1, д, и) продемонстровано вигляд скелетонів БВП, отриманих з використанням фрактального вейвлета Добеши четвертого порядку (db4).

Слід також додати, що також отримано оцінки для херстової розмірності  $D_H$  та ємнісної розмірності  $D_B$ , яку обчислено методом звичайних кліток. Вони складають  $D_H = 1.51 \pm 0.01$ ,  $D_B = 1.68 \pm 0.13$  для Хенфорда та  $D_H = 1.56 \pm 0.01$ ,  $D_B = 1.67 \pm 0.13$  для Лівінгстона.

#### 4.1.3. Результати мультифрактального аналізу

Тепер розглянемо отримані результати мультифрактального аналізу.

По-перше, обговоримо результати застосування метода WTMM. Для отримання СФ БВП використовувався фрактальний вейвлет Добеши четвертого порядку (db4). Функції мультифрактального спектру  $f(\alpha)$  обох аналізованих сигналів наведено на рис. 4.2. Встановлено, що для сигналу, зареєстрованого у Хенфорді, мінімальне значення показника Гельдера складає  $\alpha_{\min} = 0.38$ , його максимальне значення дорівнює  $\alpha_{\max} = 1.03$ , ширина мультифрактального спектру виявляється рівною  $\Delta\alpha = 0.65$ , а положення максимуму мультифрактального спектру характеризується значенням узагальненого показника Херста, що має вид  $\alpha^* = 0.65$ . Для сигналу, отриманого в Лівінгстоні, ці параметри дорівнюють відповідно  $\alpha_{\min} = 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 1.01$ ,  $\Delta\alpha = 0.65$  і  $\alpha^* = 0.66$ . Легко помітити, що ці два набори значень мультифрактальних характеристик досліджуваних сигналів майже не відрізняються один від одного.

Тепер перейдемо до розглядання результатів застосування метода MF DFA, що у графічному вигляді представлені на рис. 4.3 та рис. 4.4.

Зауважимо, що всі залежні від часу мультифрактальні характеристики (див. розділ 3), а також залежний від часу показник Херста  $H(t)$ , що насправді є частиною фрактального аналізу, обчислювалися з використанням ковзаючої віконної функції у часовій області  $W(t)$ , що мала безрозмірну ширину  $\Delta t = 3,67$ . Важливо також зауважити, що кожна конкретна величина того або іншого параметра, отримана за даного фіксованого положення ковзаючого вікна, вважалася у часі прив'язаною до положення центра цього вікна.

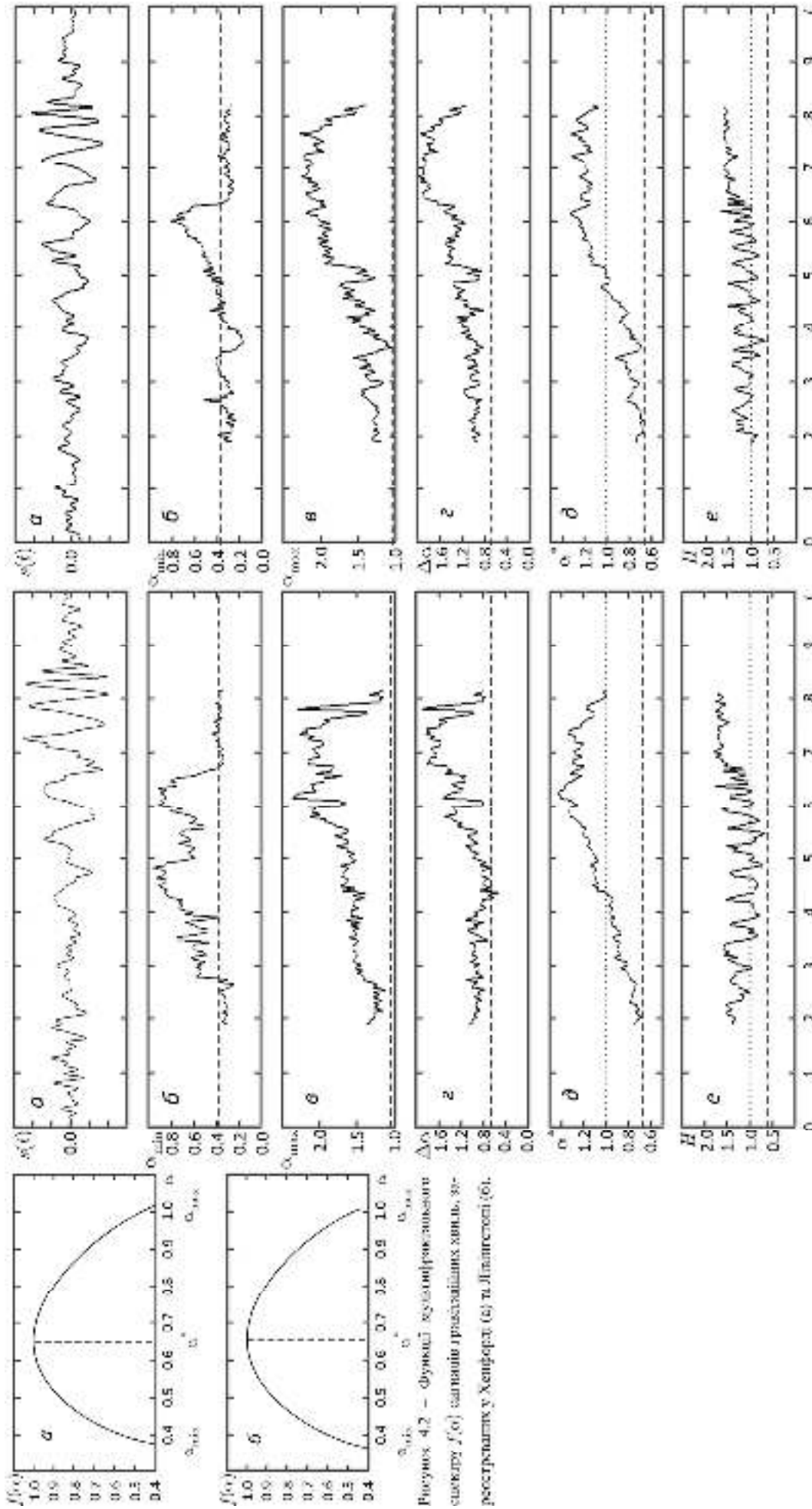
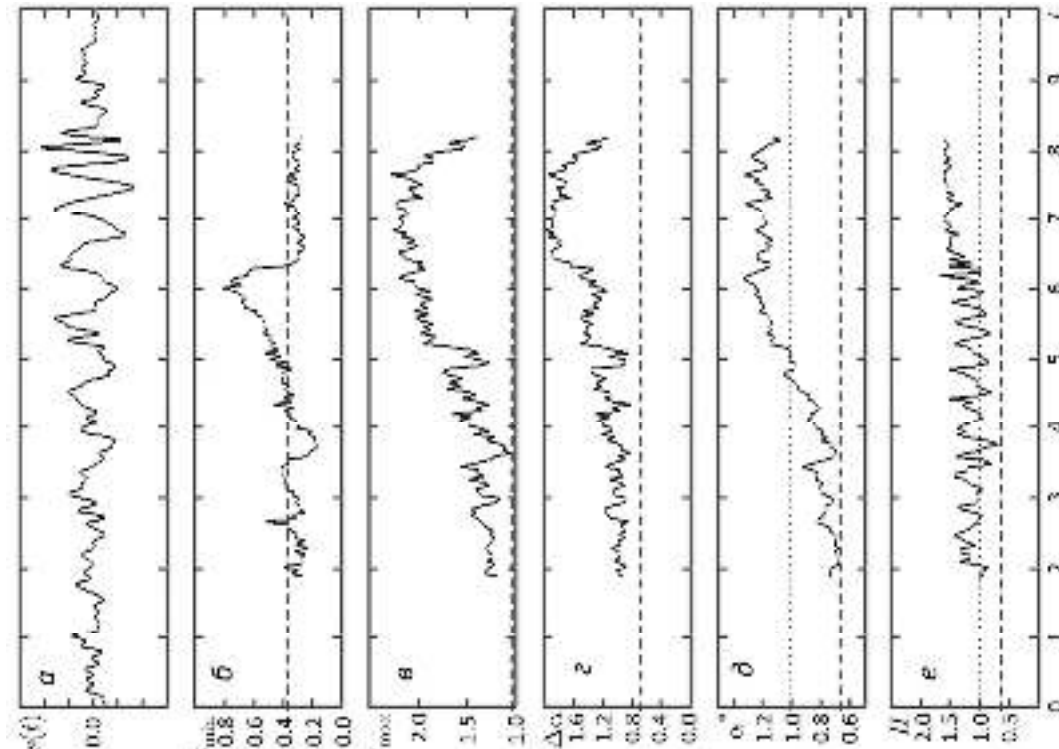


Рисунок 4.2 – Функциї аналізу частоти сигналу  $f(t)$  методом вейвлетів.  $f(t)$  – сигнал і спектрограмми сигналів, виміряних у Хемптоні (а) та Літтонствоні (б).

Рисунок 4.3 – Результати застосування вектора МВ-ДФА для аналізу сигналу графічного змісту (Хемптон); а – сигнал у часовій області; б –  $\sigma_{\max}$ ; в –  $\sigma_{\min}$ ; г –  $\Delta\sigma$ ; д –  $\Delta\sigma$ ; е –  $\alpha^2(t)$ ; ж –  $\beta - H(t)$ ; з –  $H(t)$ . Штриховані лінії – результати методу WTMM; пунктирні лінії – результати методу лінійного розширення для фракталів.

Рисунок 4.4 – Те ж саме, що й на рис. 4.3.





Тому наявність порожніх місць на кожному графіку (рис. 4.3, б – е, рис. 4.4, б – е) праворуч і ліворуч стає цілком зрозумілою. Зауважимо, що від доповнення аналізованого сигналу нулями праворуч і ліворуч, як це зазвичай робиться у подібних випадках, ми свідомо відмовилися, оскільки наявність таких нулів істотно впливає на результат оцінки кожного з обчислюваних параметрів в середині того вікна, куди ці нулі потрапляють. Тому краще взагалі не мати частини графіка, ніж отримати завідомо хибну інформацію.

Встановлено, що для обох сигналів у часовій області спостерігаються стійкі тенденції до зростання для всіх мультифрактальних характеристик ( $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\alpha^*(t)$ ), що потім майже одночасно змінюються різким зменшенням цих характеристик. Для показника ж Херста (рис. 4.3, е, рис. 4.4, е) виявлено лише слабку тенденцію до зростання. В обох випадках умови фрактальності для узагальненого показника Херста ( $0 < \alpha^*(t) < 1$ ) добре виконуються лише для  $t \leq 4,5$ . Для показника Херста ці умови ( $0 < H(t) < 1$ ) подекуди задовольняються для  $2 \leq t \leq 6$ .

#### **4.1.4. Обговорення результатів**

На початку пункту 4.1.2 вже було сказано, що аналізовані сигнали гравітаційних хвиль породжено унікальним НШС процесом. Ґрунтуючись на отриманих результатах фрактального та мультифрактального аналізів [14 – 16] та порівнюючи наші результати з отриманими авторами [188], можна стверджувати наступне.

Обидва аналізовані сигнали дійсно мають фрактальну структуру. Це переконливо підтверджують як результати фрактального, так і мультифрактального аналізів. Немає значних відмінностей між сигналами, зареєстрованими в Хенфорді та в Лівінгстоні. Аналізуючи обидва сигнали в цілому, слід зазначити, що величина узагальненого показника Херста ( $\alpha^* \approx 0,65$ ), отримана з використанням мультифрактального аналізу, досить добре узгоджується з оцінкою показника Херста ( $H \approx 0,55 \pm 0,10$ ), яку дав фрактальний аналіз. Але встановлено, що обидва сиг-

нали є мультифрактальними. Це добре демонструє рис. 4.3. Отже, отримані величини показника Херста та узагальненого показника Херста, скоріш за все, можуть перебувати під впливом адитивного білого гаусівського шуму, який, як відомо, має  $H = 0,5$ .

Але це були результати лише аналізу кожного із сигналів в цілому. Між тим, обидва сигнали є істотно нестационарними, і це теж треба прийняти до уваги. Зробити це допомагає застосування методу MF DFA.

Ґрунтуючись на залежностях  $\alpha^*(t)$ , встановлено, що обидва аналізовані сигнали можуть розглядатися в якості фрактальних приблизно в діапазоні безрозмірного часу  $t \in [0; 6]$ , де умова  $0 < \alpha^*(t) < 1$  добре задовольняється. Важливо зазначити, що на рис. 4.4, д спостерігається ще вужчий діапазон, який складає  $t \in [2; 4]$ . Але він повинен бути розширений до згаданого вище, оскільки ширина ковзаючого вікна у часовій області, яке застосовувалося під час обчислень, не була меншою за  $\Delta t = 4$ . Саме такі обмеження були продиктовані особливостями методу MF DFA та кількістю відліків дискретних векторів експериментальних даних, що були в розпорядженні авторів. У діапазоні  $t \in [0; 6]$  розташовується приблизно половина ЗСЧ НШС процесу, про який йшлося раніше. Друга його половина виявилася нефрактальною. Але питання, чи є отримана фрактальна компонента частиною сигналу гравітаційних хвиль або чи вона є шумом зовсім іншого фізичного походження, на жаль, наразі залишається без відповіді.

Отже, отримані результати фрактального і мультифрактального аналізу експериментальних реєстрацій сигналів гравітаційних хвиль добре узгоджуються з нелінійною та системною парадигмами [3 – 5]. Будучи згенерованими надзвичайно потужною, відкритою, нелінійною, динамічною системою, гравітаційні хвилі є унікальним НШС процесом, що має істотно складну, нестационарну мультифрактальну структуру. Але, на жаль, залишається нез'ясованим, чи є вони дійсно ФНШС процесом, чи просто НШС процесом, який зареєстрували на тлі наявного адитивного мультифрактального шуму. Для відповіді на це питання треба проводити нові дослідження в майбутньому.

Таким чином, у результаті проведення фрактального та мультифрактального аналізів встановлено наступне.

1. Сигнали гравітаційних хвиль, згенеровані під час процесу поєднання двох чорних дір у одну чорну діру, які було експериментально зареєстровано в Хенфорді та Лівінгстоні, виявилися мультифрактальними.

2. Будучи створеними унікальним природним ЗСЧ НШС процесом, вони мають складну нестационарну мультифрактальну структуру.

3. Фрактальний аналіз показав, що херстова розмірність  $D_H$  носія мультифрактала аналізованих сигналів дорівнює  $D_H \approx 1,45 \pm 0,10$  в діапазоні безрозмірного часу  $t = 0,156 - 5$  для Хенфорда та  $D_H \approx 1,44 \pm 0,10$  у тому ж самому діапазоні – для Лівінгстона.

4. Оцінки херстової розмірності  $D_H$  та ємнісної розмірності  $D_B$  складають  $D_H = 1.51 \pm 0.01$ ,  $D_B = 1.68 \pm 0.13$  для Хенфорда та  $D_H = 1.56 \pm 0.01$ ,  $D_B = 1.67 \pm 0.13$  для Лівінгстона.

5. Класичний мультифрактальний аналіз (метод WTMM) продемонстрував, що  $\alpha_{\min} = 0.36 - 0.38$ ,  $\alpha_{\max} = 1.01 - 1.03$ ,  $\Delta\alpha = 0.65$  і  $\alpha^* = 0.65 - 0.66$  для обох досліджуваних сигналів. Отже, обидва сигнали в цілому є мультифрактальними.

6. Застосування методу MF DFA дозволило виявити, що обидва досліджувані сигнали є сильно нестационарними, включаючи їх мультифрактальні характеристики. Встановлено, що в обох випадках умови фрактальності для узагальненого показника Херста ( $0 < \alpha^*(t) < 1$ ) добре задовольняються лише для  $t \leq 4,5$ . Для показника Херста ці умови ( $0 < H(t) < 1$ ) подекуди виконуються в межах  $2 \leq t \leq 6$ .

7. Щоб відповісти на питання, чи є сигнали гравітаційних хвиль дійсно ФНШС процесами або вони є лише НШС процесами, які зареєстровано на тлі наявної адитивного мультифрактального шуму, необхідно в майбутньому проводити нові дослідження.

## 4.2. Аналіз інфразвукових хвиль, згенерованих Челябінським метеороїдом

### 4.2.1. Загальні відомості про Челябінський метеороїд

Добре відомо, що система Земля – атмосфера – іоносфера – магнітосфера (ЗАІМ) є відкритою, нелінійною динамічною системою [3 – 5]. Багато джерел як природного (землетруси, виверження вулканів, проходження сонячного термінатора, геокосмічні бурі, падіння космічних тіл і т. і.), так і штучного (ядерні та потужні хімічні вибухи, старту та польоти ракет, потужне нестационарне електромагнітне випромінювання і т. і.) походження здатні викликати в системі ЗАІМ великомасштабні і навіть глобальні збурення. Це явище було відкрито в колишньому Радянському Союзі наприкінці 1980-х рр. науковою групою на чолі з професором кафедри космічної радіофізики Харківського державного університету (тепер – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна), д.ф.-м.н. Л. Ф. Чорногомом [3 – 5].

Падіння космічного тіла, що мало місце у лютому 2013 р. у Челябінській області (Росія) та стало відомим у середовищі фахівців як «Челябінський метеороїд», стало потужним джерелом великої кількості дуже складних процесів у системі ЗАІМ. Одним з таких процесів є генерація інфразвукових хвиль. В умовах безперервних відбивань, рефракції та розсіяння під час процесу поширення в атмосфері Землі, ці хвилі подолали багато тисяч кілометрів і були зареєстровані як станціями міжнародної системи моніторингу ядерних випробовувань, так і геофізичними обсерваторіями. Амплітуда та спектр інфразвукових сигналів містять у собі велику кількість інформації про джерело хвилі та параметри атмосфери (див., наприклад, [189, 190]). Результати спостережень інфразвукових ефектів Челябінського метеороїда є вже досить широко відомими (див., наприклад, [191]). Відповідні теоретичні оцінки можна відшукати, наприклад, у роботі [192].

Оскільки добре відомо, що традиційні методи аналізу, що базуються на перетворенні Фур'є та його модифікаціях, виявилися неефективними при дослідженні нетрадиційних (короткочасових, НШС, нелінійних, фрактальних) сигналів, для вивчення часо-частотної структури інфразвукових сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, було успішно застосовано метод ССА [193]. Це

дозволило виявити цілий комплекс різноманітних НШС процесів та оцінити їх часо-частотні параметри. Тим не менш, цілком можлива в рамках нелінійної та системної парадигм [3 – 5] наявність у цих сигналів фрактальних і мультифрактальних властивостей залишалася не дослідженою. Саме цим і опікувався автор у власних дослідженнях. Результати фрактального та мультифрактального аналізів, отримані авторами, містяться у роботах [17, 21, 22].

Під час досліджень використовувалися експериментальні дані інфразвукових сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, які було зареєстровано чуттєвими мікробарографами на станції IS27 (Німеччина), що розташована в Антарктиді [194].

Подолавши відстань 15500 км, перший з сигналів (прямий сигнал) був зареєстрований 15 лютого 2013 р. між 17.30 UT і 18.15 UT. Другий сигнал (обернений сигнал) пройшов більшу відстань (близько 25000 км) і тому був прийнятий дещо пізніше (16 лютого 2013 р. між 02.50 UT і 03.35 UT). На рис. 4.7, а та рис. 4.8, а обидва сигнали є представленими в часовій області. Один відлік за шкалою безрозмірного часу  $t$  відповідає 270 с.

#### **4.2.2. Результати фрактального аналізу**

Фрактальний аналіз у цьому випадку представлений методом ДинФА (див. підрозділ 2.2) [21, 22].

У рамках методу ДинФА отримано наступні результати, які представлено у спеціально створеному форматі (рис. 4.5, рис. 4.6). Тут у першому рядку (рис. 4.5, а, є, рис. 4.6, а, є) наведено саме реалізації сигналів у часовій області.

Далі у першому стовпці (рис. 4.5, б, рис. 4.6, б) розташовуються представлення херстової розмірності  $D_H(T, t)$ , обчисленої у ковзаючому вікні змінної ширини  $T$ , на часо-періодній площині  $(T, t)$ . Ще нижче (рис. 4.5, в – е, рис. 4.6, в – е) наведено графіки херстової розмірності  $D_H(t)$  за чотирьох фіксованих значень ширини вікна  $T$ , які наведені на рис. 4.5, б, рис. 4.6, б відповідно ліворуч у вигляді горизонтальних стрілок. Ці значення  $T$  обрано дослідниками в результаті вивчення модуля (рис. 4.5, ж, рис. 4.6, ж) та аргумента (рис. 4.5, з, рис. 4.6, з) СФ АВП,

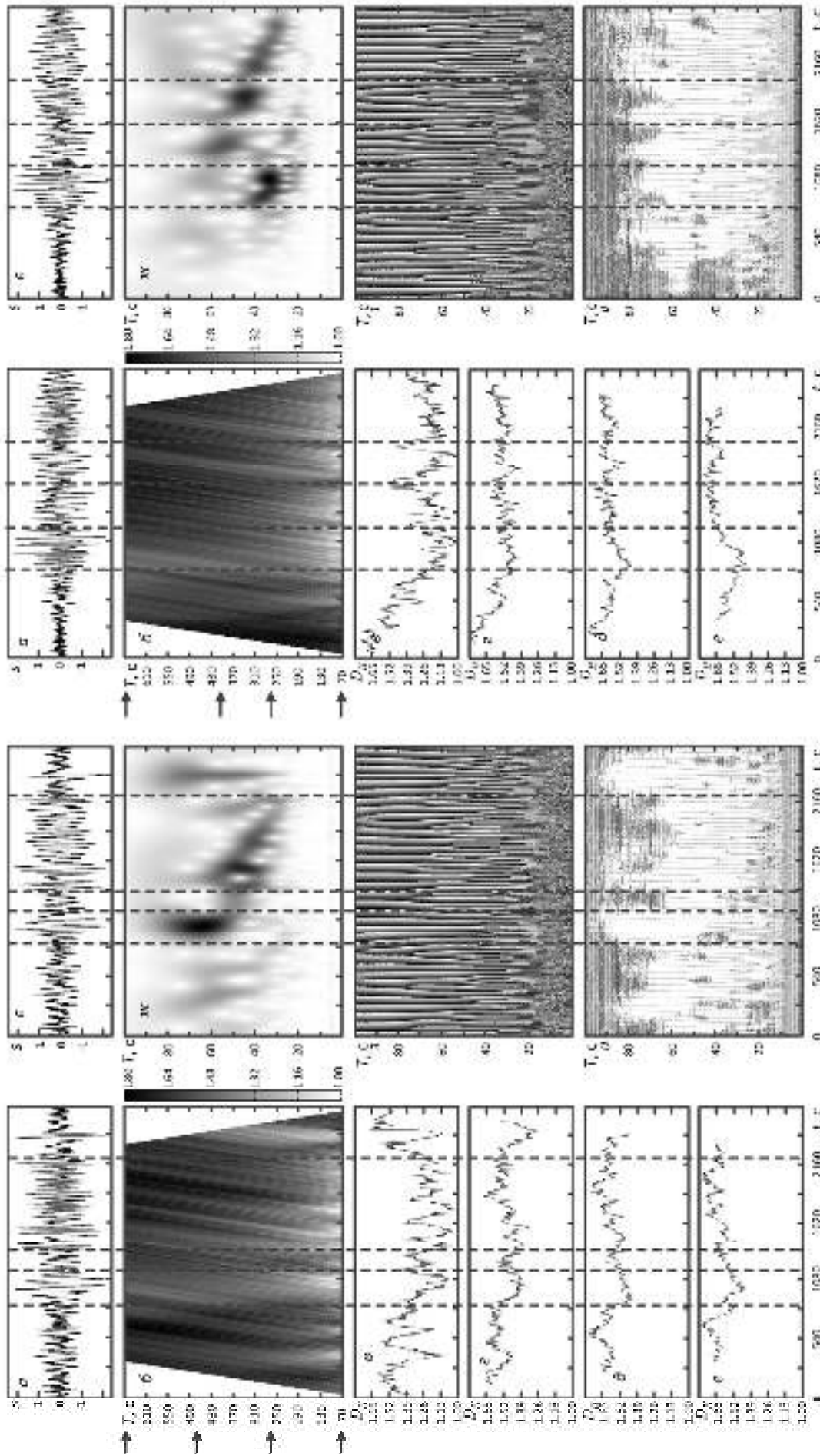


Рисунок 4.6 – Те ж саме (обернений сигнал).

Рисунок 4.5 – Результати ДДФФА акустичного НШС сигналу Чельябінського м-р

теорії (прямий сигнал); а, е – сигнал у часовій області; б – хрестова розмірність

$D_H(T)$  (г); в – хрестова розмірність  $D_H(t)$  для  $T = 70$  с; г –  $D_H(t)$  для  $T = 270$  с;

д –  $D_H(t)$  для  $T = 470$  с; е –  $D_H(t)$  для  $T = 670$  с; ж – модуль СФВ АНН (рейтинг

станд-1.1.5); з – аргумент СФВ АНН; и – скелетон аргумента СФВ АНН.

отриманої із застосування комплексного вейвлета Морле  $\text{morl-1.5}$ , а також скелетона аргумента СФ АВП (рис. 4.5, и, рис. 4.6, и). Вертикальні штриховані лінії допомагають розділити досліджуваний сигнал на декілька частин, кожна з яких містить одне із збурень, параметри якого досліджуються.

Виходячи з результатів часо-частотної структури, проведеної методом ССА в роботі [193] обидва сигнали, прямий (рис. 4.5, а) та обернений (4.11, а) містять у своєму складі по два ЗСЧ НШС процеси, параметри яких докладно розглянути нижче у пункті 4.2.3. Тут обмежимося лише висновками, що дозволив зробити ДинФА щодо кожного з них.

Отже, перший ЗСЧ НШС процес, що виявлено у складі прямого сигналу (рис. 4.5, а), має херстову розмірність  $D_H(t)$ , що змінюється межах 1.38 – 1.59 (рис. 4.5, г). Другий ЗСЧ НШС процес зі складу прямого сигналу (рис. 4.5, а) має херстову розмірність  $D_H(t)$ , що змінюється межах 1.51 – 1.78 (рис. 4.5, е).

Перший ЗСЧ НШС процес, що міститься у структурі оберненого сигналу (рис. 4.6, а), має херстову розмірність  $D_H(t)$ , що змінюється межах 1.45 – 1.77 (рис. 4.6, г). Другий ЗСЧ НШС процес, який виявлено у часо-частотній структурі оберненого сигналу (рис. 4.6, а), має херстову розмірність  $D_H(t)$ , що змінюється межах 1.61 – 1.77 (рис. 4.6, е).

#### **4.2.3. Результати мультифрактального аналізу**

Застосування методу WTTM [17] дозволило встановити наступне.

Прямий сигнал (рис. 4.7, а) має мультифрактальну структуру з  $\alpha_{\min} = 0.03$ ,  $\alpha_{\max} = 0.44$ ,  $\Delta\alpha = 0.41$ ,  $\alpha^* = 0.22$ . Більш того, показник Херста, обчислений для всього цього сигналу разом, складає  $H = 0.37 \pm 0.01$ .

У оберненого сигналу (рис. 4.8, а) також існує мультифрактальна структура, що має відповідно  $\alpha_{\min} = 0.12$ ,  $\alpha_{\max} = 0.38$ ,  $\Delta\alpha = 0.26$ ,  $\alpha^* = 0.25$  і  $H = 0.58 \pm 0.01$ . Наявність складної, нестационарної мультифрактальної структури також підтверджується наявністю у обох сигналів характерних розгалужених

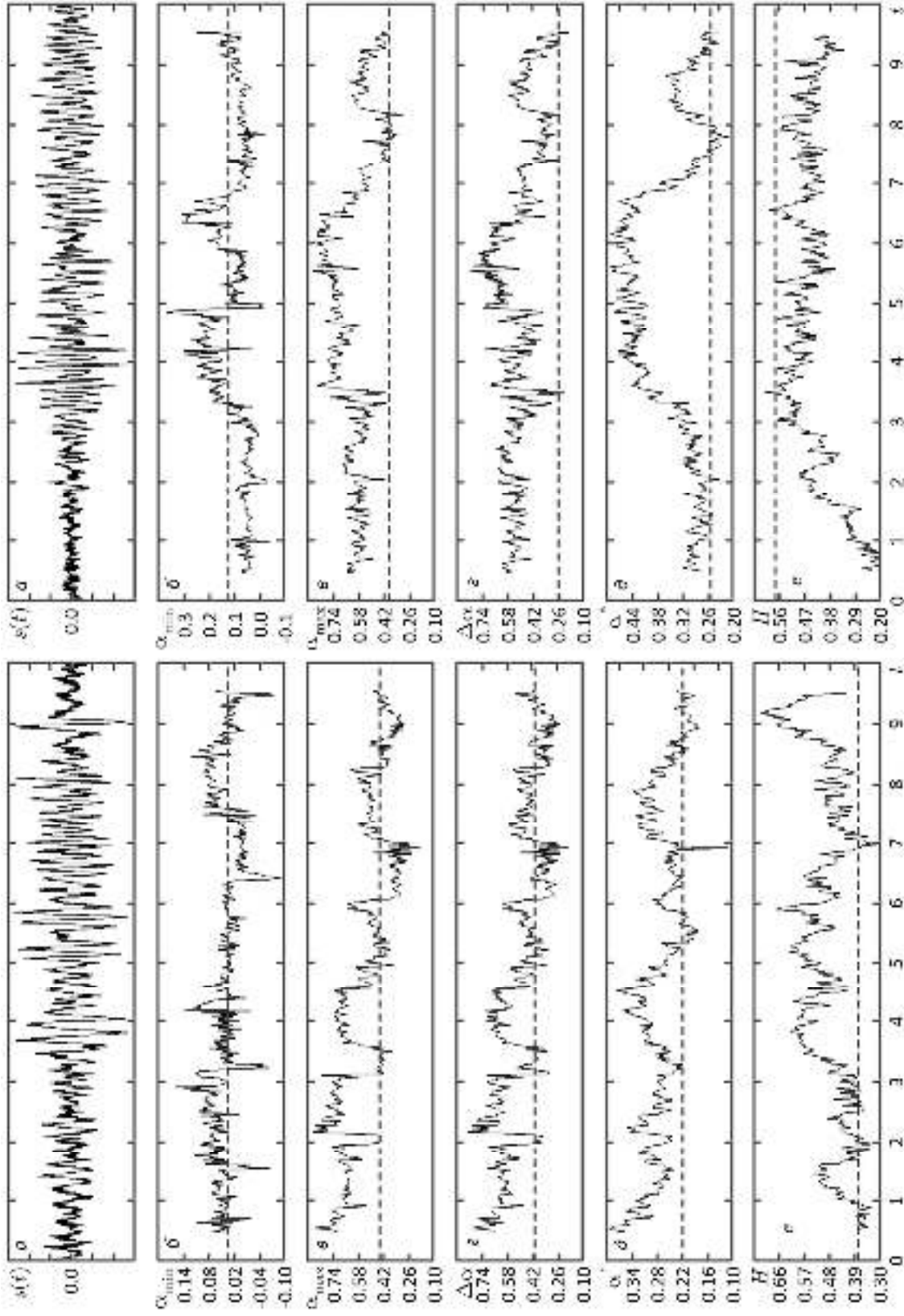


Рисунок 4.3 – Те же же (обращенный сигнал).

Рисунок 4.4 – Результаты зашумленной методу MF DF-A для нелиней акустического

НШС сигнала (прямой сигнал): а – сигнал у входной области, б –  $\alpha_{\min} = \alpha_{\min}(t)$ ,

в –  $\alpha_{\max} = \alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha = \Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha = \alpha(t)$ , е –  $H = H(t)$ . Штриховки

линей показывают результаты, полученные методом WTKM для исходного сигнала.



«деревоподібних» структур на їх модулях СФ БВП (рис. 4.9, б, рис. 4.10, б) та їх скелетонах (рис. 4.9, в, рис. 4.10, в).

У відповідності до результатів ССА [193] прямий сигнал (рис. 4.7, а) містить у собі два НШС процеси. Будучи ЗСЧ НШС процесом, перший з них розпочався приблизно о 17.41 UT ( $t \approx 2.4$ ), мав тривалість  $\tau \approx 600 - 660$  с ( $\Delta t \approx 2.2 - 2.5$ ) та показник широкосмуговості  $\mu \approx 0.8$ . Його динамічний показник широкосмуговості (для ширини ковзаючого вікна  $\Delta t_w = 1$ ) змінювався у межах  $\mu_d \approx 0.6 - 0.3$  із часом, періоди збурень сигналу дорівнювали 35 – 90 с ( $T \approx 0.13 - 0.33$ ), середній період збурень зменшувався приблизно за лінійним законом від 65 с до 40 с ( $T_0 = 0.24 - 0.15$ ). Цю інформацію, отриману методом ССА і представлену в його спеціальному форматі, тут не наведено, але її можна побачити на рис. 4.9, б, хоча і з значно гіршою роздільною здатністю. Метод MF DFA показав [17], що цей ЗСЧ НШС процес ( $t \approx 2.4 - 4.9$ ) має  $\alpha_{\min} = -0.05 - 0.15$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.40 - 0.80$ ,  $\alpha^* = 0.22 - 0.36$  і  $H = 0.35 - 0.60$ .

Другий ЗСЧ НШС процес розпочався приблизно о 17.52 UT ( $t \approx 4.8$ ), мав тривалість  $\tau \approx 900 - 960$  с ( $\Delta t \approx 3.3 - 3.6$ ), показник широкосмуговості  $\mu \approx 0.8$ , його динамічний показник широкосмуговості змінювався із часом у межах  $\mu_d \approx 0.2 - 0.3$ , періоди збурень сигналу дорівнювали 20 – 60 с ( $T \approx 0.07 - 0.22$ ), середній період збурень зменшувався із часом приблизно за лінійним законом з 50 с до 30 с ( $T_0 = 0.19 - 0.11$ ). Застосування метода MF DFA показало, що другий ЗСЧ НШС процес ( $t \approx 4.8 - 8.4$ ) мав  $\alpha_{\min} = -0.10 - 0.11$ ,  $\alpha_{\max} = 0.18 - 0.62$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.58$ ,  $\alpha^* = 0.12 - 0.32$  і  $H = 0.30 - 0.65$ .

Для оберненого сигналу також було виявлено два ЗСЧ НШС процеси. Перший з них розпочався приблизно о 03.03 UT ( $t \approx 2.9$ ), мав тривалість  $\tau \approx 600 - 900$  с ( $\Delta t \approx 2.2 - 3.3$ ), показник широкосмуговості  $\mu \approx 0.7$ , його динамічний показник широкосмуговості змінювався із часом у межах

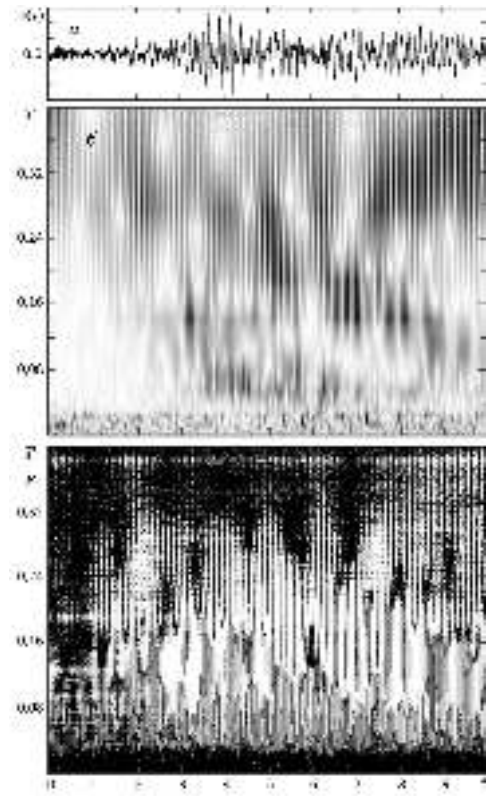
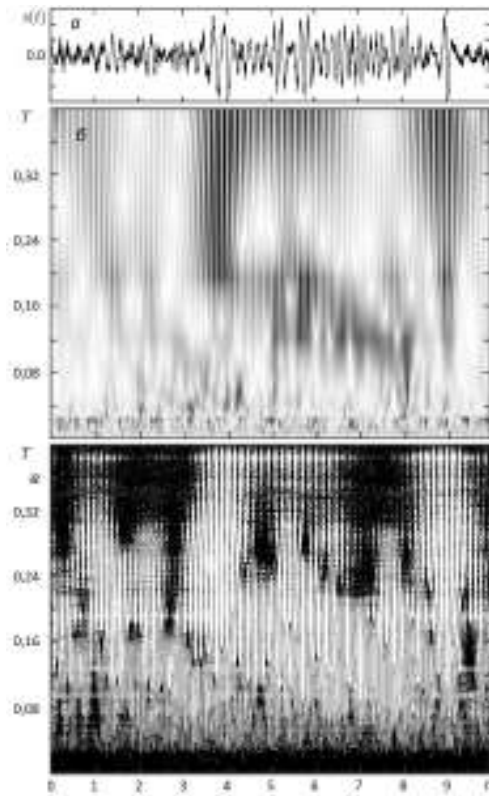


Рисунок 4.9 – Результати аналізу вей- Рисунок 4.10 – Те ж саме (обернений влет-аналізу акустичного НШС сигналу сигнал). (прямий сигнал): а – сигнал у часовій області, б – модуль СФ БВП, в – скелетон БВП.

$\mu_d \approx 0.35 - 0.3$ , періоди збурень сигналу дорівнювали  $20 - 40$  с ( $T \approx 0.07 - 0.15$ ), середній період збурень зменшувався із часом приблизно за лінійним законом з  $32$  с до  $22$  с ( $T_0 = 0.12 - 0.08$ ). Метод MF DFA продемонстрував, що цей ЗСЧ НШС процес ( $t \approx 2.9 - 6.2$ ) мав  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.22 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.30 - 0.48$  і  $H = 0.38 - 0.60$ .

Другий ЗСЧ НШС процес розпочався приблизно о  $03.10$  UT ( $t \approx 4.4$ ), мав тривалість  $\tau \approx 1500$  с ( $\Delta t \approx 5.6$ ), показник широкосмуговості  $\mu \approx 0.8$ , його динамічний показник широкосмуговості змінювався із часом у межах  $\mu_d \approx 0.5 - 0.2$

, періоди збурень сигнала дорівнювали  $28 - 70$  с ( $T \approx 0.10 - 0.26$ ), середній період збурень зменшувався із часом приблизно за лінійним законом з  $55$  с до  $30$  с ( $T_0 = 0.20 - 0.11$ ). Застосування метода MF DFA дозволило встановити, що цей ЗСЧ НШС процес ( $t \approx 4.4 - 10$ ) мав  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.34 - 0.88$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.21 - 0.48$  і  $H = 0.32 - 0.60$ . Обидва ЗСЧ НШС процеси також мали у часі часткове перекриття протягом приблизно  $150 - 200$  с.

#### **4.2.4. Обговорення результатів**

Отже, застосування методів ССА, фрактального та мультифрактального аналізів дозволило виявити у кожному з двох експериментальних сигналів (прямого й оберненому) по два ЗСЧ НШС процеси, що мають мультифрактальні властивості, а також оцінити їх фрактальні та мультифрактальні характеристики та дослідити часову та часо-періодну динаміку цих характеристик. Також слід висказати певні припущення щодо фізичної природи цих ЗСЧ НШС процесів [21, 22].

Скоріш за все, перший ЗСЧ НШС процес у кожній з аналізованих часових реалізацій є пов'язаним з генерацією та поширенням вибухової ударної хвилі.

Існування ж другого ЗСЧ НШС процесу в обох реалізаціях може бути пояснено генерацією та поширенням балістичної хвилі.

Таким чином, за результатами проведених досліджень встановлено наступне.

1. Встановлено, що акустичні НШС сигнали, згенеровані під час падіння Челябинського метеороїда, є фрактальними ЗСЧ НШС процесами зі складною, нестационарною мультифрактальною структурою.

2. Застосування нового методу фрактального аналізу, метода ДинФА, дозволило дослідити складні нестационарні часову та часо-періодну структури херстової розмірності носія мультифрактала та провести відповідні оцінки для кожного виявленого ЗСЧ НШС процесу.

3. Із використанням класичного мультифрактального аналізу (метод WTMM) продемонстровано, що обидва досліджувані сигнали в цілому мають мультифрактальні властивості. Оцінено відповідні мультифрактальні характеристики.

4. Із застосуванням методу MF DFA встановлено, що досліджувані сигнали є сильно нестационарними, у тому числі у сенсі мультифрактальних характеристик.

5. Отримані результати є свідченням особливої складності процесів, що відбуваються у системі ЗАІМ під дією такого потужного нестационарного джерела енерговиділення, як падіння метеороїдів.

#### **4.3. Аналіз варіацій електромагнітного поля Землі протягом надпотужної магнітної бурі 7 – 8 вересня 2017 р.**

Ще одним потужним нестационарним джерелом енерговиділення у системі ЗАІМ, про яку йшлося вище (див. пункт 4.2.1), є потужна магнітна буря (МБ), що є невід'ємною складовою геокосмічної бурі (див., наприклад, [1 – 3]). Зважаючи на те, що МБ є значно частішим явищем, ніж падіння метеороїдів, проведення фрактального та мультифрактального аналізу варіацій електромагнітного поля Землі, що виникають протягом МБ, є цікавим та актуальним. Результати таких досліджень містяться у роботах автора [18, 20], що вийшли у світ у 2018 р.

Надпотужна МБ, що відбулася 7 – 8 вересня 2017 р., через причини, які обговорюються нижче, викликала величезну цікавість із боку спеціалістів. Так, у 2018 – 2020 рр. у ХНУ імені В. Н. Каразіна в рамках виконання НДР і кваліфікаційних магістерських і бакалаврських робіт для аналізу часо-частотної структури відповідних варіацій електромагнітного поля Землі також успішно застосовувалися методи системного спектрального [20], вейвлет- [195 – 196] і вігнер-аналізів [197], а також апарат атомарних функцій [198]. Також відбувалися окремі спроби покращення результатів фрактального аналізу [199, 200].

##### ***4.3.1. Загальні відомості про надпотужну магнітну бурю 7 – 8 вересня 2017 р.***

Геокосмічна буря – це комплекс синергетично взаємодіючих магнітної, атмосферної, іоносферної та електричної бур. Геокосмічні бурі зазвичай викликаються потужними нестационарними процесами на Сонці, які супроводжуються значним збільшенням інтенсивності сонячного вітру та викидів корональної маси [1].

МБ – це комплекс явищ, що є результатом взаємодії щільного згустку плазми сонячного вітру, який утворився під час потужного спалаху на Сонці, з магнітосферою Землі (див., наприклад, [201]).

МБ створюють надпотужний, повністю негативний вплив на стан людської цивілізації у великих, а інколи навіть, у планетарних масштабах. Чим більш потужною є МБ, тим більш відчутним є цей вплив. Складні фізичні, хімічні, фізико-хімічні, біологічні, біофізичні, біохімічні і т. і. механізми цього впливу базуються, у першу чергу, на виникненні явища електромагнітної індукції в середовищах та об'єктах як штучного, так і природнього походження. Це, в свою чергу, веде до порушення штатних режимів їх функціонування та спричиняє різноманітні нещасні випадки, аварії та катастрофи [202].

Саме тому дослідження МБ займає важливе місце серед найважливіших задач сучасної науки. На сьогодні існує розгалужена міжнародна система спостережень за станом електромагнітного поля Землі, яка публікує у відкритому доступі відповідну оперативну інформацію в мережі Інтернет (див., наприклад, [203]).

Найбільш відомими числовими характеристиками МБ є АЕ-індекс,  $D_{st}$ -індекс,  $K_p$ -індекс та  $A_p$ -індекс (див., наприклад, [204]). Для розуміння результатів наведених нижче досліджень для нас є важливими останні дві характеристики. Їх фізичний сенс полягає у наступному (див., наприклад, [204]).  $K_p$ -індекс описує ступінь збуреності магнітного поля Землі. Його оцінка виконується один раз на три години.  $A_p$ -індекс показує середньодобову збуреність геомагнітного поля та обчислюється на основі добової залежності  $K_p$ -індекса, тобто один раз на добу.

Обидва індекси вимірюються у спеціальних умовних одиницях. Якщо значення  $K_p$ -індекса розташовані в діапазоні від 0 до 3+, то магнітне поле вважається спокійним. Коли значення  $K_p$ -індекса потрапляють у діапазон від 4- до 4+, то говорять про збурене магнітне поле. Стану МБ відповідає ситуація, якщо значення  $K_p$ -індекс дорівнюють від 5- до 9.

Обидва індекси мають загальнопланетарний характер. За необхідності дані про  $K_p$ -індекс та  $A_p$ -індекс можна отримати, наприклад, на сайті Потсдамської обсерваторії (Німеччина) [194].

Крім того, в різних точках на поверхні Землі проводяться безпосередні вимірювання часових варіацій індукції електромагнітного поля Землі. Робиться це із застосуванням спеціальних приборів, які називають магнітометрами [201]. Сучасні магнітометри забезпечують точність вимірювань в межах  $10^{-10} - 10^{-13}$  Тл [201].

Зазвичай магнітометри реєструють дві ортогональні горизонтальні компоненти вектора індукції електромагнітного поля Землі, які прийнято називати D- і H-компонентами.

У розпорядженні спеціалістів кафедри космічної радіофізики перебуває магнітометр-флюксометр, що розташований на Радіофізичній обсерваторії Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна (сел. Граково). Його технічні характеристики можна відшукати, наприклад, у роботі [205]. Всі експериментальні дані часових варіацій індукції електромагнітного поля Землі, що досліджуються у даній роботі, отримано саме з використанням цього магнітометра-флюксометра.

Переходячи до описання МБ, що відбулася 7 – 8 вересня 2017 р., слід зазначити, що за потужністю вона виявилася найсильнішою у 2017 р. та двадцятою за увесь час спостережень людства за станом електромагнітного поля Землі (див., наприклад, [203]). Саме тому її прийнято називати надпотужною МБ.

Це підтверджується величинами  $K_p$ - та  $A_p$ -індексів (рис. 4.13, в). Так, якщо 7 вересня 2017 р.  $A_p$ -індекс складав лише 36, то 8 вересня 2017 р. він сягнув значення 106, що є майже втричі більшим за попереднє. У той самий час  $K_p$ -індекс у проміжку між 21:00 UT і 24:00 UT 7 вересня 2017 р. дорівнював 8-, між 00:00 UT і 03:00 UT 8 вересня 2017 р. збільшився до 8, а між 12:00 UT і 15:00 UT 8 вересня 2017 р. сягнув величини 8+. Це добре продемонстровано на рис. 4.13, в. Натомість, у фонові дні (наприклад, після бурі 10 вересня 2017 р.) спостерігається  $A_p=4$ , а значення  $K_p$ -індекса не перевищує 3.

На рис. 4.11, рис. 4.12 наведено варіації D- і H-компонент індукції електромагнітного поля Землі, що були зареєстровані 7 – 8 вересня 2017 р. Для обох компонент чітко спостерігається, що основні збурення фіксуються між 24:00 UT 7 вересня 2017 р. і 03:00 UT 8 вересня 2017 р. та між 11:00 UT і 16:00 UT 8 вересня 2017 р.

На рис. 4.11 та 4.15 положення цих збурень на часовій осі відзначено сірими овалами. Для зручності на рис. 4.11, рис. 4.12 присутні графіки як дводобових (рис. 4.11, а, рис. 4.12, а), так і однодобових (рис. 4.11, б, в, рис. 4.12, б, в) реалізацій. Отримані результати для D- (рис. 4.13, а) і H-компонент (рис. 4.13, б) добре корелюють з часовими змінами  $K_p$ -індекса (рис. 4.13, в). Саме на встановлених проміжках часу нами й будуть проведено фрактальний і мультифрактальний аналізи.

#### **4.3.2. Результати фрактального аналіза**

У межах фрактального аналізу для досліджуваних чотирьох часових реалізацій сигналів (рис. 4.14 – 4.20, а) проведено оцінювання часових залежностей показника Херста  $H(t)$  у ковзаючому у часовій області вікні та херстової розмірності  $D_H$ , яка в межах моделі УБР пов'язана з ним співвідношенням  $D_H = 2 - H$ . Також з використанням вейвлет-аналіза (БВП) здійснено виявлення збурень та проведено оцінювання їх часо-частотних характеристик. При проведенні БВП використовувалася вейвлет Морле. Отримано наступні результати [18, 20].

Для D-компоненти електромагнітного поля Землі за проміжок часу з 22:00 UT 7 вересня 2017 р. по 03:00 UT 8 вересня 2017 р. виявлено чотири групи збурень. Розглянемо кожну з них докладніше.

Перша група збурень (23:00 – 23.33 UT) має тривалість  $\tau = 33$  хв, діапазон періодів збурень  $T = 15 \dots 850$  с, херстову розмірність, яка змінюється у межах  $D_H = 1.35 \dots 1.75$ , та містить у власному складі один ультракороткий (УК) НШС процес з  $\tau = 5$  хв,  $T = 100 \dots 750$  с і показником широкосмуговості  $\mu = 1.5$ . Друга група збурень (23:54 – 00.17 UT) характеризується  $\tau = 23$  хв,  $T = 250 \dots 800$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.75$  та містить у власному складі один УК НШС процес з  $\tau = 8$  хв,  $T = 400 \dots 750$  с,  $\mu = 0.6$ . Третя група збурень (00:27 – 00.52 UT) має  $\tau = 25$  хв,  $T = 15 \dots 1000$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.65$  та містить у собі два УК НШС процеси. Перший з них має  $\tau = 3$  хв,  $T = 20 \dots 120$  с,  $\mu = 1.4$ , другий –  $\tau = 8$  хв,  $T = 200 \dots 800$  с,  $\mu = 1.2$  відповідно. Четверта група збурень (01:12 – 01.45 UT) показує  $\tau = 33$  хв,  $T = 15 \dots 1000$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.75$  та містить один УК НШС процес, що має  $\tau = 2$  хв,  $T = 60 \dots 130$  с,  $\mu = 0.7$ .

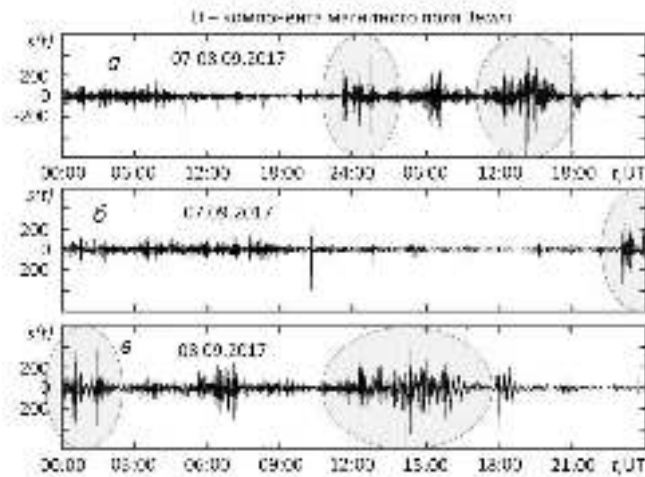


Рисунок 4.11 – Часові варіації D-компоненти електромагнітного поля Землі, що виникли протягом надпотужної МБ (7 – 8 вересня 2017 р.): а – за дві доби 07 – 08.09.2017 р., б – за добу 07.08.2017 р., в – за добу 08.09.2017 р. Сіримі овалами виділено власне МБ.

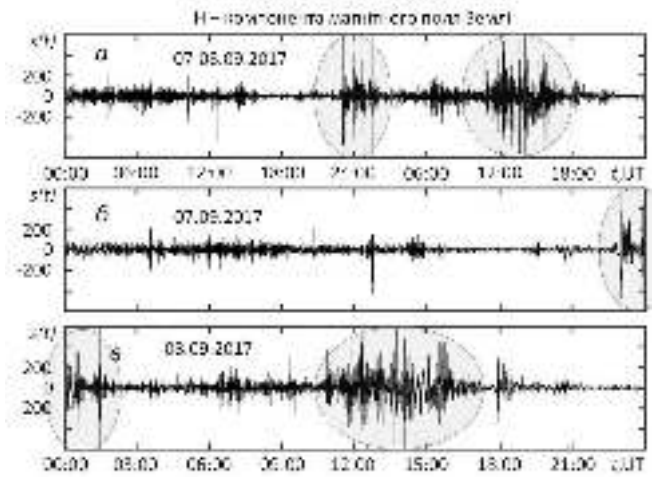


Рисунок 4.12 – Те ж саме для H-компоненти електромагнітного поля Землі.

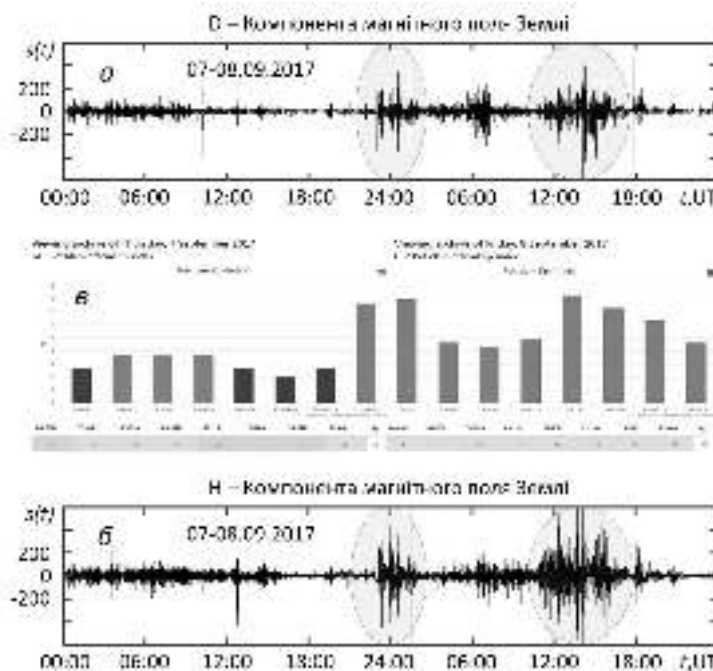


Рисунок 4.13 – Часові варіації D-компоненти (а) та H-компоненти (б) електромагнітного поля Землі, що виникли протягом надпотужної МБ (7 – 8 вересня 2017 р.), на тлі часових змін  $K_p$ -індекса (в) [203]. Сіримі овалами виділено власне МБ.



Для Н-компоненти електромагнітного поля Землі за проміжок часу з 22:00 UT 7 вересня 2017 р. до 03:00 UT 8 вересня 2017 р. виявлено чотири групи збурень.

Перша група збурень (23:00 – 23.33 UT) має тривалість  $\tau = 33$  хв, діапазон періодів збурень  $T = 15 \dots 1000$  с, херстову розмірність у діапазоні  $D_H = 1.35 \dots 1.65$  та містить у власному складі один УК НШС процес з  $\tau = 8$  хв,  $T = 15 \dots 750$  с,  $\mu = 1.9$ . Друга група збурень (23:54 – 00.22 UT) має  $\tau = 28$  хв,  $T = 200 \dots 1000$  с,  $D_H = 1.35 \dots 1.75$  та містить у собі один УК НШС процес з  $\tau = 10$  хв,  $T = 250 \dots 800$  с,  $\mu = 1.0$ . Третя група збурень (00:27 – 00.52 UT) має  $\tau = 25$  хв,  $T = 15 \dots 700$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.85$  та містить один УК НШС процес з  $\tau = 8$  хв,  $T = 200 \dots 700$  с,  $\mu = 1.1$ . Четверта група збурень (01:12 – 01.45 UT) має  $\tau = 33$  хв,  $T = 15 \dots 750$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.80$  містить один УК НШС процес з  $\tau = 40$  с,  $T = 15 \dots 50$  с,  $\mu = 1.1$ .

Для D-компоненти електромагнітного поля Землі з 11:00 UT до 16:00 UT 8 вересня 2017 р. виявлено чотири групи збурень.

Перша група збурень (12:06 – 12.34 UT) має тривалість  $\tau = 28$  хв, діапазон періодів збурень  $T = 15 \dots 820$  с, діапазон значень херстової розмірності  $D_H = 1.35 \dots 1.75$  та містить один ЗСЧ НШС процес з  $\tau = 10$  хв,  $T = 120 \dots 700$  с,  $\mu = 1.4$ , динамічним показником широкосмуговості  $\mu_d = 0.8 \dots 0.5$  та зменшуючимся середнім періодом  $T_0 = 400 \dots 190$  с. Друга група збурень (12:47 – 13.12 UT) має  $\tau = 25$  хв,  $T = 170 \dots 700$  с,  $D_H = 1.65 \dots 1.85$  та містить у власному складі один УК НШС процес з  $\tau = 12$  хв,  $T = 200 \dots 600$  с,  $\mu = 1.0$ . Третя група збурень (13:28 – 15.10 UT) має  $\tau = 100$  хв,  $T = 15 \dots 1000$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.90$  та містить два ЗСЧ НШС процеси з  $\tau = 20$  хв,  $T = 250 \dots 1000$  с,  $\mu = 1.2$ ,  $\mu_d = 0.7 \dots 0.6$ ,  $T_0 = 775 \dots 325$  с. Четверта група збурень (15:22 – 16.00 UT) має  $\tau = 38$  хв,  $T = 15 \dots 900$  с,  $D_H = 1.65 \dots 1.80$  та містить у собі один УК НШС процес з  $\tau = 2$  хв,  $T = 15 \dots 90$  с,  $\mu = 1.4$ .

Для Н-компоненти електромагнітного поля Землі за проміжок часу з 11:00 UT до 16:00 UT 8 вересня 2017 р. виявлено три групи збурень.

Перша група збурень (11:40 – 13.12 UT) має тривалість  $\tau = 92$  хв, діапазон періодів збурень  $T = 15 \dots 800$  с,  $D_H = 1.55 \dots 1.75$  та містить у власному складі один ЗСЧ НШС процес з  $\tau = 35$  хв,  $T = 60 \dots 550$  с,  $\mu = 1.6$ ,  $\mu_d = 0.6 \dots 1.2$ ,  $T_0 = 340 \dots 325$  с. Друга група збурень (13:32 – 14:35 UT) має  $\tau = 63$  хв,  $T = 15 \dots 1000$  с,  $D_H =$

1.40...1.80 та містить один ЗСЧ НШС процес з  $\tau = 35$  хв,  $T = 120...1000$  с,  $\mu = 1.6$ ,  $\mu_d = 0.9...0.7$ ,  $T_0 = 700...190$  с. Третя група збурень (14:40 – 16.00 UT) має  $\tau = 80$  хв,  $T = 15...1000$  с,  $D_H = 1.55...1.75$  та містить у своєму складі один УК НШС процес з  $\tau = 35$  хв,  $T = 400...1000$  с,  $\mu = 0.9$ .

#### **4.3.3. Результати мультифрактального аналізу**

Для кожної з чотирьох окремих груп збурень, що було виявлено в часо-періодній структурі D-компоненти електромагнітного поля Землі за проміжок часу від 22:00 UT 7 вересня 2017 р. до 03:00 UT 8 вересня 2017 р. та параметри яких наведено у попередньому пункті, в рамках мультифрактального аналізу методом MF DFA оцінено низку мультифрактальних параметрів [18, 20] (рис. 4.14), які перелічено раніш в пункті 3.1.2.

Для першої групи збурень (23:00 – 23.33 UT) маємо  $\alpha_{\min} = 0.0...0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...2.5$ ,  $\Delta\alpha = 0.5...2.5$ ,  $\alpha^* = 0.30...0.75$ . Друга група збурень (23:54 – 00.17 UT) характеризується  $\alpha_{\min} = 0.0...0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.5$ ,  $\Delta\alpha = 0.5...1.5$ ,  $\alpha^* = 0.30...0.65$ . Третя група збурень (00:27 – 00.52 UT) має  $\alpha_{\min} = 0.1...0.4$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.2$ ,  $\Delta\alpha = 0.3...0.9$ ,  $\alpha^* = 0.50...0.70$ . Четверта група збурень (01:12 – 01.45 UT) оцінюється так:  $\alpha_{\min} = -0.4...0.4$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.2$ ,  $\Delta\alpha = 0.2...1.0$ ,  $\alpha^* = 0.35...0.75$ .

Для кожної з чотирьох груп збурень, що було виявлено в часо-періодній структурі H-компоненти електромагнітного поля Землі за проміжок часу з 22:00 UT 7 вересня 2017 р. до 03:00 UT 8 вересня 2017 р. та параметри яких розглянуто у попередньому пункті, оцінено мультифрактальні параметри, отримані з використанням метода MF DFA (рис. 4.15).

Перша група збурень (23:00 – 23.33 UT) має  $\alpha_{\min} = 0.0...0.3$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.5$ ,  $\Delta\alpha = 0.5...1.5$ ,  $\alpha^* = 0.15...0.75$ . У другій групі збурень (23:54 – 00.22 UT) виявлено  $\alpha_{\min} = 0.0...0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4...1.0$ ,  $\Delta\alpha = 0.2...1.0$ ,  $\alpha^* = 0.30...0.75$ . Для третьої групи збурень (00:27 – 00.52 UT) отримано  $\alpha_{\min} = 0.1...0.3$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.1$ ,  $\Delta\alpha = 0.5...1.0$ ,  $\alpha^* = 0.40...0.60$ . Для четвертої групи збурень (01:12 – 01.45 UT) маємо  $\alpha_{\min} = -0.4...0.4$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5...1.1$ ,  $\Delta\alpha = 0.0...1.5$ ,  $\alpha^* = 0.20...0.75$ .

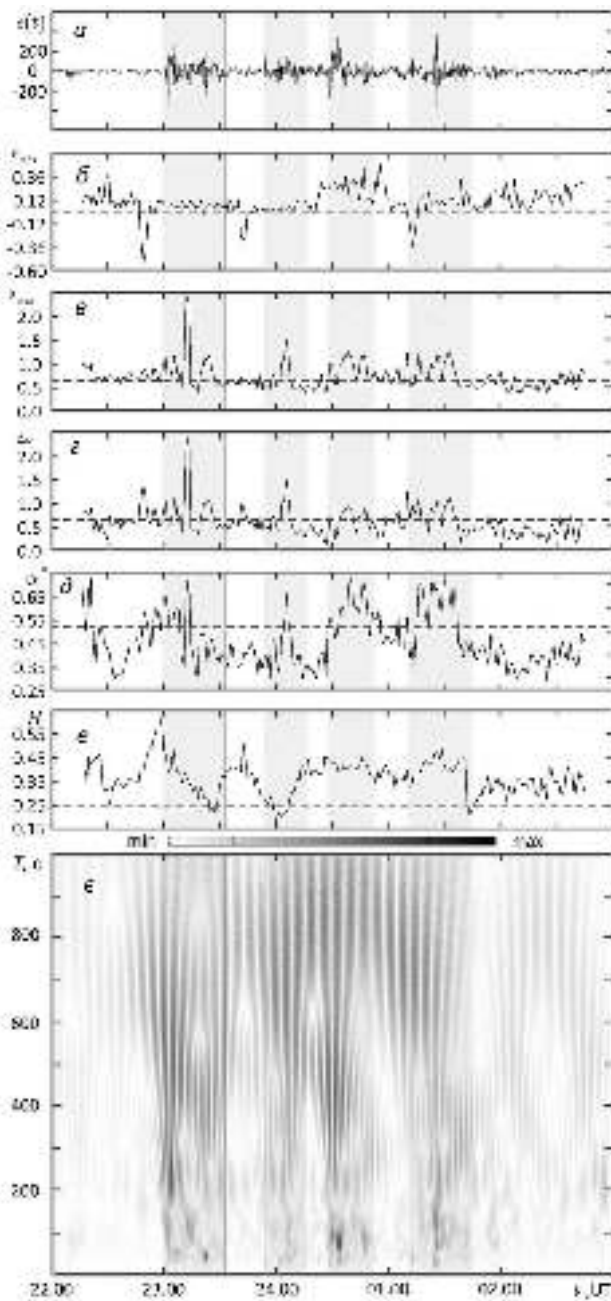


Рисунок 4.14 – Результати мультифрактального аналізу часових варіацій електромагнітного поля Землі, що виникли протягом надпотужної МБ (7 – 8 вересня 2017 р.) (D-компонента): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $H(t)$ , ж – ФСГ БВП сигналу. Сіримі прямокутниками позначені виявлені збурення.

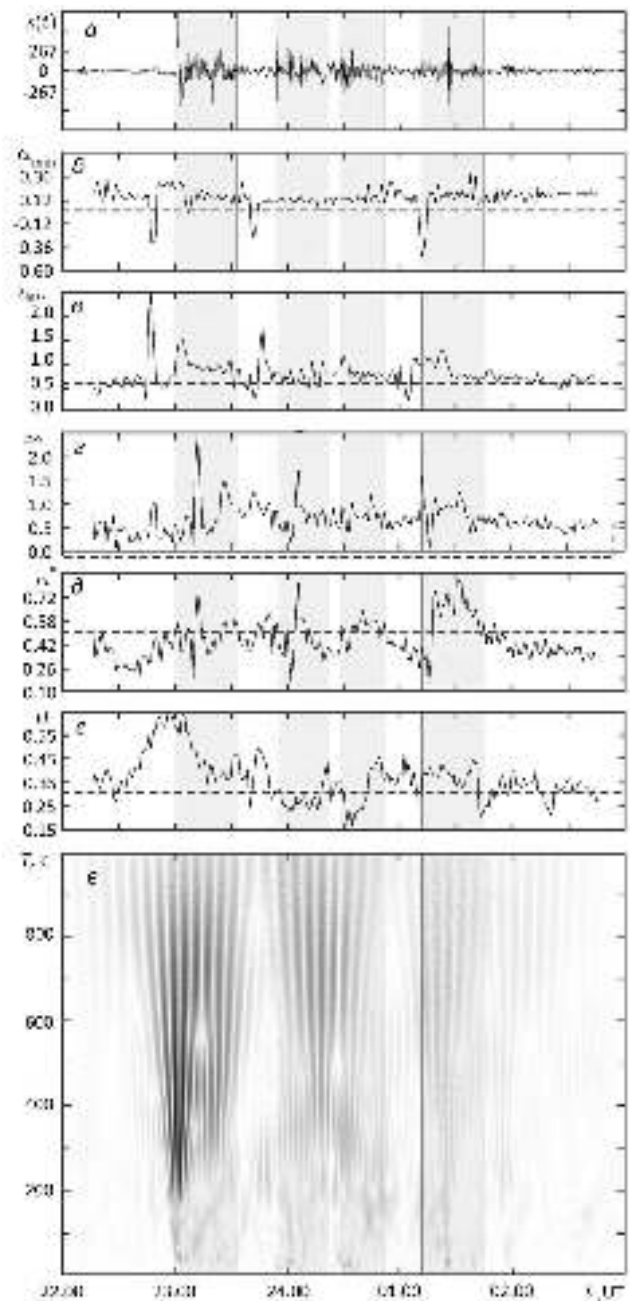


Рисунок 4.15 – Те ж саме (H-компонента).

У часо-періодній структурі D-компоненти електромагнітного поля Землі, що були зареєстровані протягом надпотужної МБ з 11:00 UT по 16:00 UT 8 вересня 2017 р., також виявлено чотири окремі групи збурень. Оскільки їх часо-частотні та фрактальні параметри розглядалися у попередньому пункті, тут наведемо відповідні мультифрактальні параметри (рис. 4.16).

Перша група збурень (12:06 – 12.34 UT) має  $\alpha_{\min} = 0.0 \dots 0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.5 \dots 2.5$ ,  $\Delta\alpha = 0.5 \dots 2.5$ ,  $\alpha^* = 0.30 \dots 0.75$ . У другій групі збурень (12:47 – 13.12 UT) виявлено  $\alpha_{\min} = 0.0 \dots 0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4 \dots 0.7$ ,  $\Delta\alpha = 0.2 \dots 0.7$ ,  $\alpha^* = 0.25 \dots 0.40$ . Для третьої групи збурень (13:28 – 15.10 UT) отримано  $\alpha_{\min} = -0.4 \dots 0.4$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4 \dots 1.6$ ,  $\Delta\alpha = 0.2 \dots 1.4$ ,  $\alpha^* = 0.3 \dots 1.0$ . Четверта група збурень (15:22 – 16.00 UT) має  $\alpha_{\min} = -0.1 \dots 0.2$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4 \dots 0.8$ ,  $\Delta\alpha = 0.2 \dots 0.8$ ,  $\alpha^* = 0.3 \dots 0.6$ .

У той самий час для відповідної Н-компоненти спостерігалось лише три групи збурень, параметри яких наведено у попередньому пункті. Відповідні виявлені мультифрактальні параметри мають наступний вигляд (рис. 4.17).

Для першої групи збурень (11:40 – 13.12 UT) маємо  $\alpha_{\min} = -0.1 \dots 0.3$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4 \dots 1.2$ ,  $\Delta\alpha = 0.2 \dots 1.2$ ,  $\alpha^* = 0.25 \dots 0.60$ . Друга група збурень (13:32 – 14:35 UT) характеризується  $\alpha_{\min} = -0.1 \dots 0.1$ ,  $\alpha_{\max} = 0.4 \dots 1.1$ ,  $\Delta\alpha = 0.4 \dots 1.0$ ,  $\alpha^* = 0.35 \dots 0.85$ . Третя група збурень (14:40 – 16.00 UT) має  $\alpha_{\min} = -0.1 \dots 0.2$ ,  $\alpha_{\max} = 0.6 \dots 1.3$ ,  $\Delta\alpha = 0.2 \dots 1.3$ ,  $\alpha^* = 0.40 \dots 0.65$ .

#### **4.1.1. Обговорення результатів**

Таким чином, із використанням методів часо-частотного (метод ССА), фрактального (метод ДинФА) та мультифрактального (метод MF DFA) проведено всебічний аналіз часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокоосмічної бурі, яка відбулася 7 – 8 вересня 2017 р. У результаті цього встановлено наступне.

1. Зареєстровані хвильові збурення мають у своєму складі низку УК НШС і ЗСЧ НШС процесів. Оцінено їх тривалості, діапазони періодів, показники широкосмуговості, динамічні показники широкосмуговості. Отримані дані додано до

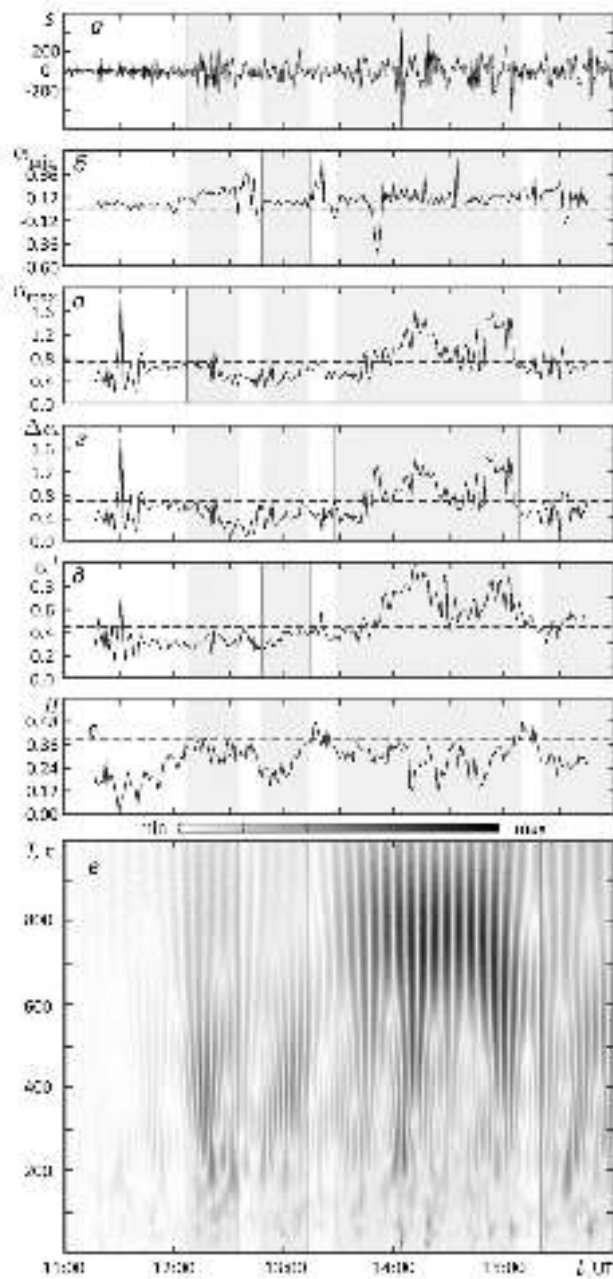


Рисунок 4.16 – Результати мультифрактального аналізу часових варіацій електромагнітного поля Землі, що виникли протягом надпотужної МБ (8 вересня 2017 р.) (D-компонента): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $H(t)$ , ж – ФСГ БВП сигнала. Сірими прямокутниками позначені виявлені збурення.

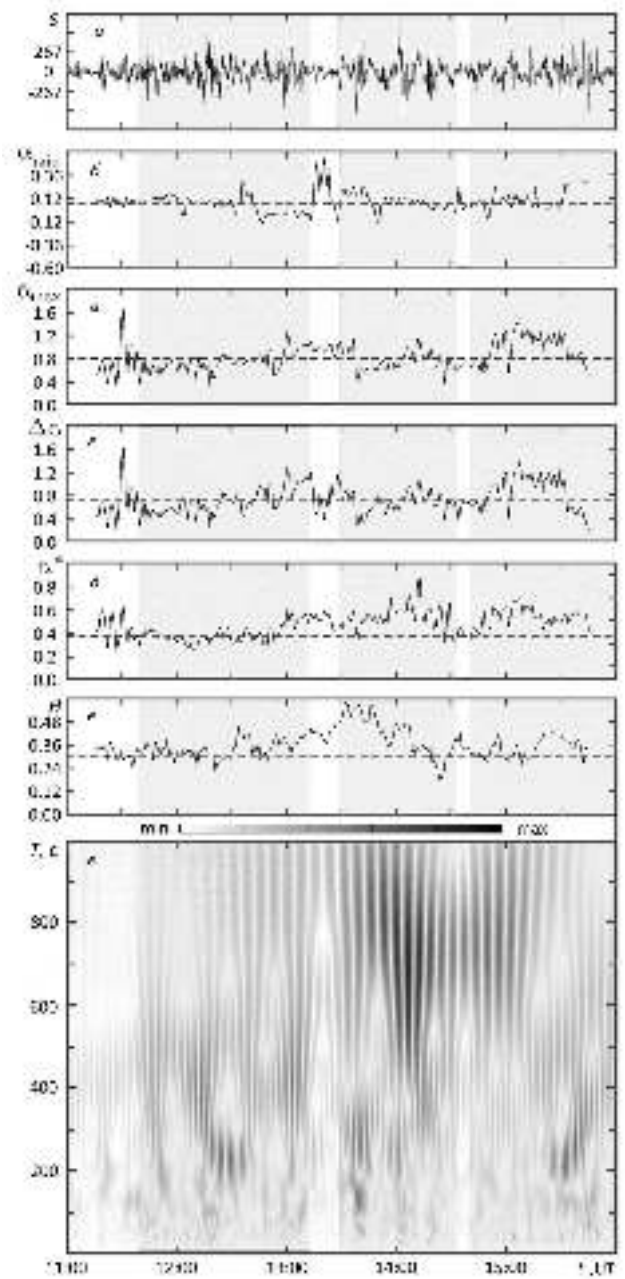


Рисунок 4.17 – Те ж саме (H-компонента).

статистичної бази параметрів збурень магнітного поля Землі, що виникають у геокосмосі під дією потужних, нестационарних джерел енерговиділення. Коли буде набрано статистично вагомих набір даних щодо цих параметрів, отримані закономірності будуть використані науковою школою проф. Л. Ф. Черногора для розв'язання важливої наукової проблеми здійснення оперативного моніторингу стану геокосмосу, яка стоїть перед міжнародним співтовариством.

2. Із використанням методів фрактального та мультифрактального аналізів встановлено, що виявлені хвильові збурення мають характерну фрактальну структуру. Оцінено набір відповідних фрактальних і мультифрактальних числових характеристик, досліджено їх часову динаміку. Продемонстровано, що досліджувані НШС процеси одночасно є й фрактальними процесами, а тому можуть бути віднесені до класу ФНШС процесів.

3. Виявлення у досліджених хвильових процесів фрактальних властивостей добре підтверджує на практиці основні положення нелінійної та системної парадигм [3 – 5], про які вже йшлося вище.

Зазначимо, що оскільки результати аналізу подій, викладені у підрозділах 4.1 – 4.3, були опубліковані до створення авторами у 2022 р. методів КФ для монофрактального та мультифрактального аналізів, інформація про застосування цих методів у даних підрозділах відсутня. Але це зовсім не означає, що автори не зробили цього у власних дослідженнях, результати яких виходять за межі даної дисертаційної роботи.

#### **4.4. Аналіз варіацій електромагнітного поля Землі під час землетрусу 24 січня 2020 р. у Туреччині**

Ще у 1990 р. один з піонерів застосування фрактальних ідей до вивчення землетрусів Х. Такаяцу (Н. Takayasu) відзначав: «Землетруси мають таку кількість різних фрактальних властивостей, що їх можна віднести до найбільш цікавих фрактальних явищ» [46]. Одна з таких фрактальних властивостей здатна проявлятися у часових варіаціях електромагнітного поля Землі, що виникають під час потужних землетрусів.

Пояснення цьому фактові легко дати з використанням нелінійної та системної парадигм [3 – 5]. Землетрус є потужним, нестаціонарним джерелом енерговиділення в літосфері. У свою чергу, літосфера є невід’ємною складовою відкритої, нелінійної, динамічної системи ЗАІМ. Під впливом землетрусу в ній виникає цілий комплекс дуже складних і різноманітних процесів, що можуть належати до короткочасних, надширокосмугових, нелінійних і фрактальних. У результаті тісної взаємодії підсистем у складі ЗАІМ відповідні збурення виникають також у магнітосфері та можуть бути зафіксовані, наприклад, магнітометрами на поверхні Землі. Саме часові варіації електромагнітного поля Землі, що виникають під час потужного землетрусу, й досліджуються нами у даному підрозділі. Такими міркуваннями зумовлено наш інтерес до можливої наявності фрактальних властивостей у цих часових варіацій.

На жаль, через принципову обмеженість обсягу даної дисертаційної роботи тут ми розглянемо тільки одну подібну подію – потужний землетрус, що відбувся 24 січня 2020 р. у Туреччині [25, 27].

#### ***4.4.1. Загальні відомості про землетрус 24 січня 2020 р.***

Землетрус магнітудою 6.7 і тривалістю 15 с стався о 17:55:14 (тут і далі всесвітній час, UT) 24 січня 2020 р. біля м. Сиврідж, провінція Елязиг, Туреччина, де проживає близько 4 тис. осіб. Від землетрусу постраждало 1547 осіб, а 35 осіб загинуло. Координати епіцентру наступні: 38.4° пн. ш., 39.1° сх. д. Глибина землетрусу становила 10 км [206].

Спираючись на дані про стан космічної погоди під час землетрусу [206], можна стверджувати, що цей день був магнітоспокійним. Це дає можливість сподіватися, що причиною досліджуваних варіацій електромагнітного поля Землі дійсно є саме цей землетрус, а отже і виявлені ефекти можна пов’язувати саме з ним.

Ретельний аналіз часо-частотної структури хвильових процесів, що виникли у геомагнітному полі під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., був проведений у роботі [206]. Тому тут ми зосередимося саме на дослідженні фрактальних властивостей цих виявлених процесів.

У наших дослідженнях аналізу підлягали часові варіації геомагнітного поля (D- і H-компоненти), які відбувалися з 15:00 до 21:00 напередодні землетрусу (23 січня 2020 р.), у день землетрусу (24 січня 2020 р.) та у наступний день після землетрусу (25 січня 2020 р.).

#### **4.4.2. Результати фрактального аналізу**

Для проведення монофрактального аналізу варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., нами використовувався метод ДинФА у поєднанні з методом КФ, які було докладно розглянуто у Розділі 2. Результати аналізу наведено на рис. 4.18 (D-компонента) та рис. 4.19 (H-компонента). Нами встановлено наступне [25].

Приблизно за півгодини почалося до землетрусу розпочалося зростання величини херстової розмірності  $D_H(t)$  від приблизно 1.5 до 1.9. Досягнення функцією  $D_H(t)$  максимуму співпало з початком землетрусу, після чого  $D_H(t)$  стала зменшуватися. Другий її максимум, дещо менший за величиною, спостерігався приблизно через 70 хвилин після початку землетрусу і пов'язаний, скоріш за все, з афтершоком.

Для часової залежності показника Херста  $H(t) = 2 - D(t)$  спостерігалися відповідно два мінімуми. Із фізичної точки зору це означає, що фрактальний процес за півгодини до землетрусу істотно змінив свій характер: від майже просто випадкового ( $D_H(t) = 1.5$ ) він став сильно антиперсистентним ( $D_H(t) = 1.9$ ). Також слід зазначити, що це відбувалося майже синхронно для обох компонент геомагнітного поля.

Натомість щоб з'ясувати, чи є отримані ефекти закономірністю для потужних землетрусів, слід дослідити ще багато подібних подій, оскільки відшукати щось подібне у опублікованих результатах інших наукових груп, на жаль, не вдалося.

#### **4.4.1. Результати мультифрактального аналізу**

У результаті застосування методу WTMM отримано наступний набір мультифрактальних числових характеристик, який докладно обговорювався у Розділі 3.



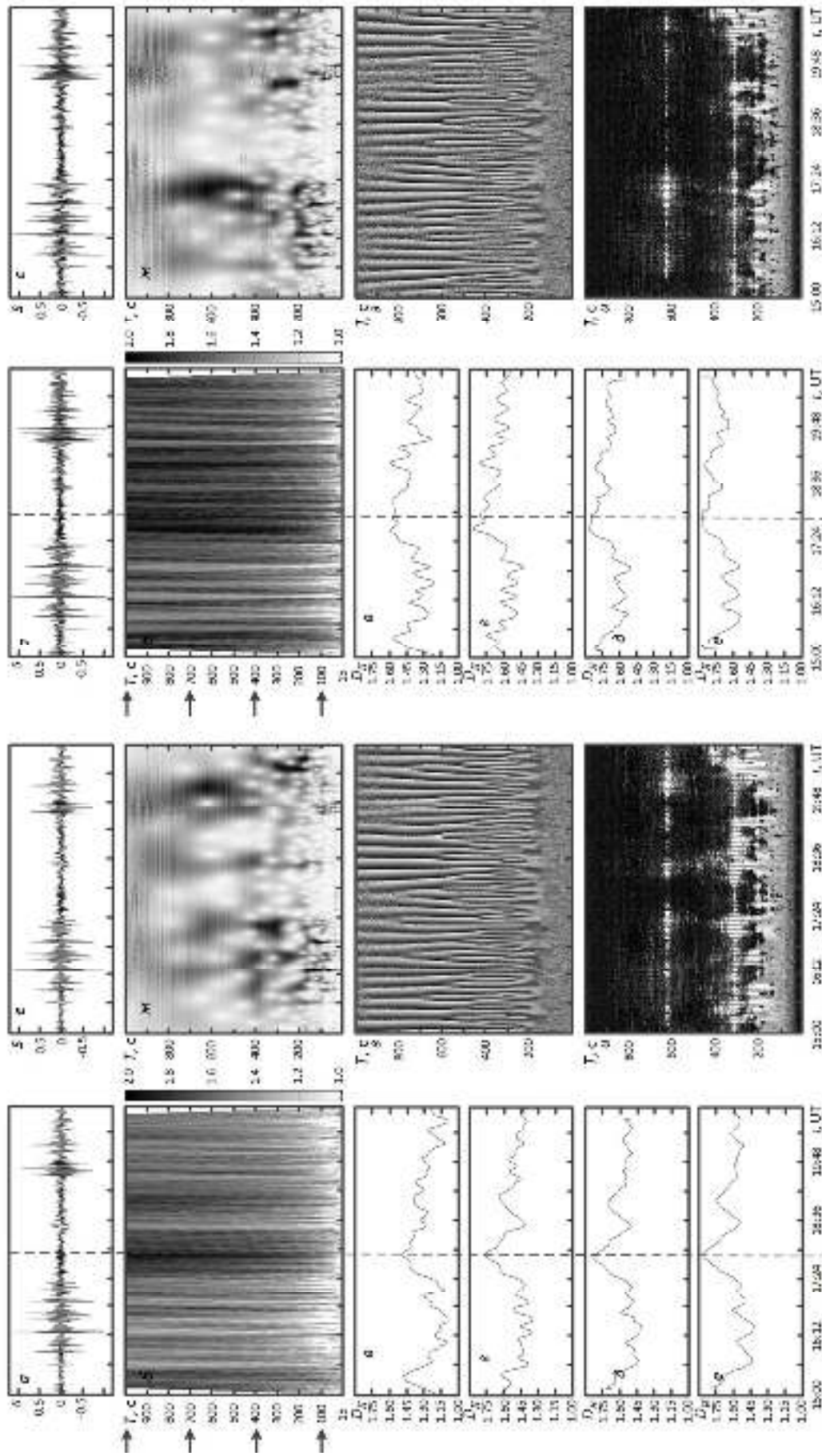


Рисунок 4.18 – Результати Дифузійної томографії геомагнітного поля від часе землетрусу

24 січня 2020 р. (D-компонента): а, б – сигнали у часовій області; в – херс для області зміряється,  $D_0(t, \nu)$ ; г – херс для області зміряється,  $D_0(t, \nu)$  для  $T = 1000$  с; і –  $D_0(t)$  для

$T = 400$  с; д –  $D_0(t)$  для  $T = 700$  с; е –  $D_0(t)$  для  $T = 1000$  с; ж – модуль СФ АВП (лейклет спот-1.5); з – аргумент СФ АВП, в – спектр аргумента СФ АВП.

Вертикальними пунктирними лініями позначено час землетрусу.

Рисунок 4.19 – Те ж саме (H-компонента).

23 січня 2020 р., D-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.04$ ,  $\alpha_{\max} = 0.66$ ,  $\Delta\alpha = 0.62$ ,  $\alpha^* = 0.44$ ,  $K_f = -0.60$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.41$ , Н-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.05$ ,  $\alpha_{\max} = 0.51$ ,  $\Delta\alpha = 0.46$ ,  $\alpha^* = 0.36$ ,  $K_f = -0.73$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.28$ .

24 січня 2020 р., D-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.06$ ,  $\alpha_{\max} = 0.62$ ,  $\Delta\alpha = 0.56$ ,  $\alpha^* = 0.48$ ,  $K_f = -1.10$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.17$ , Н-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.01$ ,  $\alpha_{\max} = 0.50$ ,  $\Delta\alpha = 0.49$ ,  $\alpha^* = 0.40$ ,  $K_f = -1.36$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.23$ .

25 січня 2020 р., D-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.05$ ,  $\alpha_{\max} = 0.74$ ,  $\Delta\alpha = 0.69$ ,  $\alpha^* = 0.37$ ,  $K_f = 0.15$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.86$ , Н-компонента:  $\alpha_{\min} = 0.08$ ,  $\alpha_{\max} = 0.54$ ,  $\Delta\alpha = 0.46$ ,  $\alpha^* = 0.31$ ,  $K_f = -0.04$ ,  $f_\alpha = 1.0$ ,  $\mu_\alpha = 1.48$ .

Характерний вигляд функцій  $f(\alpha)$  для D- і Н-компонент геомагнітного поля, отриманих у день землетрусу, наведено на рис. 4.22.

Ми вже вище зазначали, що значення мультифрактальних характеристик, отриманий методом WTMM, має той недолік, що має відношення одразу до всієї реалізації. Наразі тривалість кожної з оброблених реалізацій сигналів складала 6 годин. Скоріш за все, саме тому істотної різниці між отриманими результатами за вказані три доби майже не спостерігається. Хоча певні відмінності все ж є. Так, для D-компоненти у день землетрусу дещо зменшилися величини  $\alpha_{\max}$ ,  $\Delta\alpha$ ,  $K_f$  і  $\mu_\alpha$ , зросла величина  $\alpha^*$ . Для Н-компоненти цей день дещо зменшилися величини  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$ ,  $K_f$  і  $\mu_\alpha$ , натомість зросли величини  $\Delta\alpha$  і  $\alpha^*$ .

Зрозуміло, що основну інформацію про часові зміни мультифрактальних характеристик досліджуваних сигналів надав метод MF DFA. Його результати представлено на рис. 4.20, 4.24, 4.26 – 4.29 у форматі, який детально розглядався у Розділі 3. Звернемо увагу на те, що на графіках часових залежностей мультифрактальних характеристик горизонтальними пунктирними лініями вказано відповідні зна-

чення цих характеристик, отримані вище методом WTMM. Це досить зручно, оскільки показує, як відхиляється локальне значення характеристики від того, що отримано одразу для всієї реалізації.

Отже проаналізуємо отримані результати. Спочатку звернемося до особливостей часової поведінки мультифрактальних характеристик для хвильових збурень, виявлених в роботі [206]. На щастя, у нашому форматі існує ФСГ БВП, по якій можна відстежувати збурення, про які йдеться.

Тут слід зробити два зауваження. По-перше, часо-періодні структури збурень в роботі [206] шукалися у діапазоні періодів 15 – 1000 с, тому ми робимо так саме. По-друге, автори [206] використовували у БВП нефрактальний вейвлет Морле (morl), натомість ми, пам'ятаючи загальну мету наших досліджень, застосовували фрактальний вейвлет Добеши четвертого порядку (db4). Як показує практика застосування різних вейвлетів у БВП (див., наприклад, [8]), істотного впливу на характер ФСГ БВП це не створює.

Почнемо з 23 січня 2020 р. – дня напередодні землетрусу. Для D-компоненти геомагнітного поля виявлено два основних збурення: перше з 16:30 по 18:00, друге з 19:30 по 21:00 (рис. 4.23, з). Протягом першого з них (16:30 – 18:00) спостерігалося (рис. 4.23) збільшення  $\alpha_{\min}(t)$  (приблизно з 0.1 до 0.3), різке збільшення з наступним падінням величин  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\alpha^*(t)$  (в діапазонах 0.6 – 1.3, 0.4 – 1.2 і 0.3 – 0.7 відповідно), майже лінійне зменшення  $\mu_{\alpha}(t)$  з 2.0 до 0.6, а також утворення значного локального мінімуму  $K_f(t)$  (в діапазоні від 0.5 до –1.4).

Цікавості отриманим результатам додає той факт, що автори [206] пов'язують це збурення із передвісником землетрусу, який проявився приблизно за 25,5 годин до самої події.

Друге хвильове збурення асоціюється із збільшенням магнітної активності [206]. Для нього виявлено наступні особливості мультифрактальних характеристик. Спостерігалося збільшення  $\alpha_{\min}(t)$  (приблизно з –0.1 до 0.1), різке збільшення з наступним падінням величин  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\alpha^*(t)$  (в діапазонах 0.8 – 1.2,

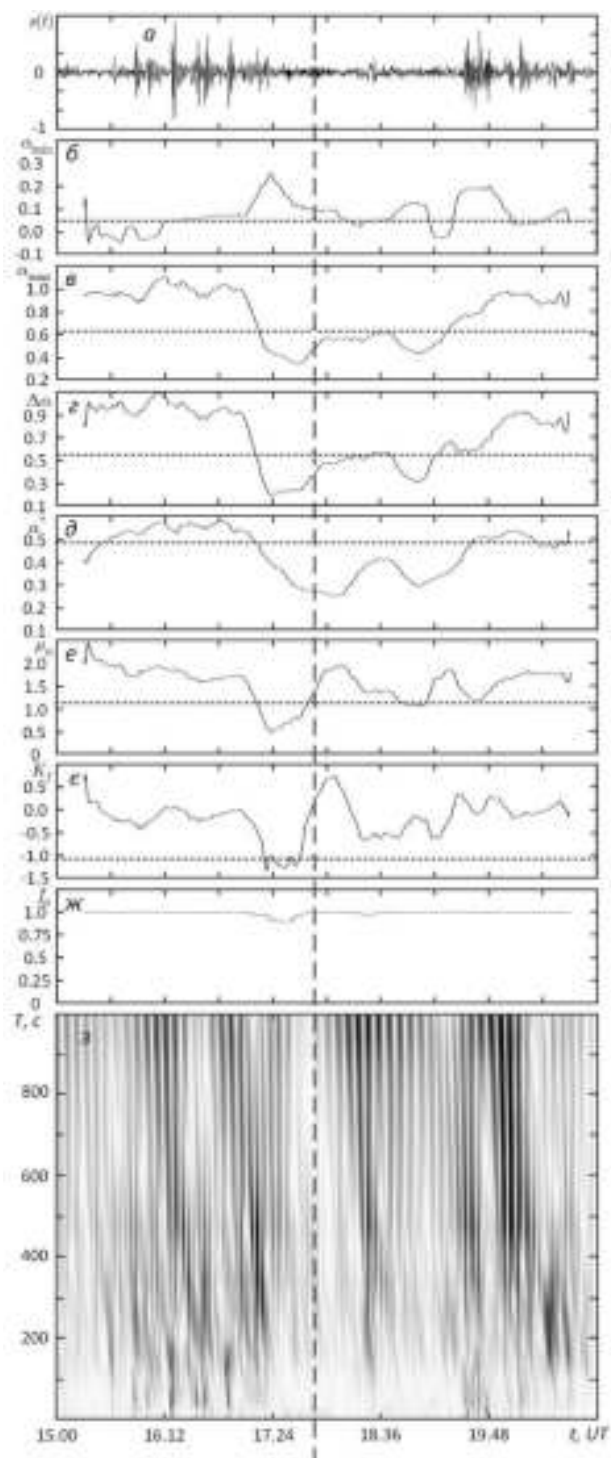


Рисунок 4.20 – Результати мультифрактального аналізу (метод MF DFA) часових варіацій геомагнітного поля 24 січня 2020 р. (D-компонента): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $\mu_\alpha(t)$  є –  $K_f(t)$ , ж –  $f_\alpha(t)$ , з – ФСГ БВП сигналу (вейвлет db4). Вертикальна штрихова лінія показує момент землетрусу.

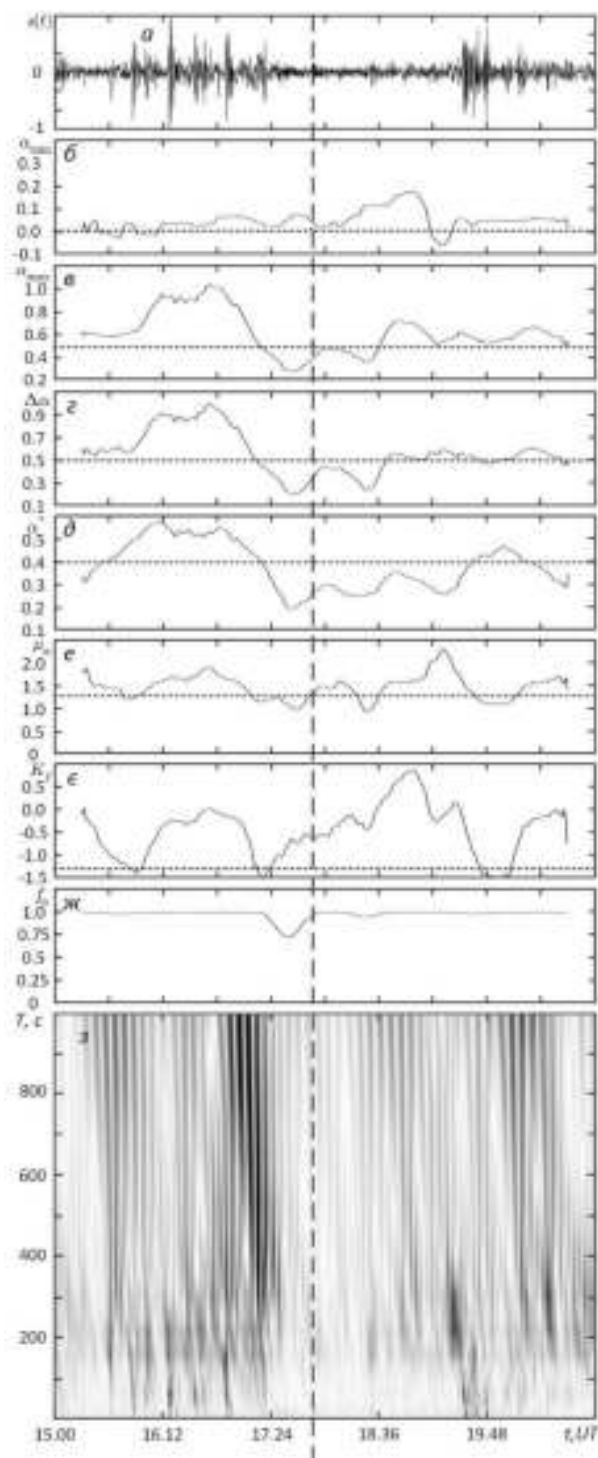


Рисунок 4.21 – Те ж саме (H-компонента).

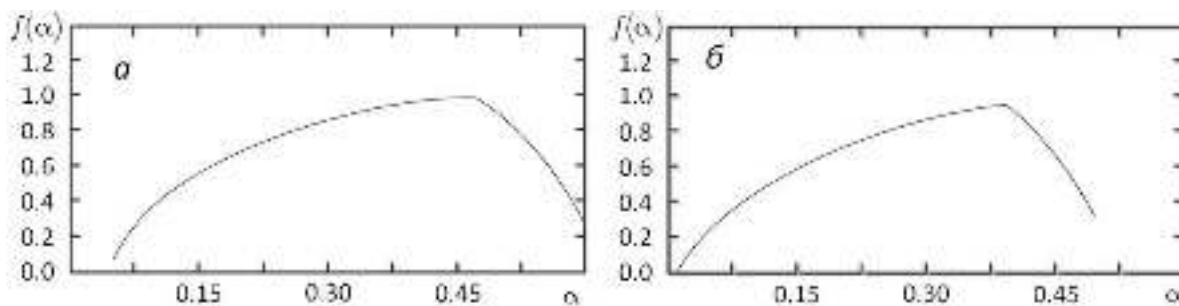


Рисунок 4.22 – Результати мультифрактального аналізу (метод WTMM) часових варіацій геомагнітного поля 24 січня 2020 р.: а – мультифрактальний спектр (D-компонента), б – мультифрактальний спектр (H-компонента).

0.6 – 1.2 і 0.35 – 0.55 відповідно), майже лінійне зменшення  $\mu_\alpha(t)$  з 2.5 до 1.2, натомість  $K_f(t)$  майже не змінювався (стрімке падіння у самому кінці, скоріш за все, є просто крайовим ефектом).

Перейдемо до H-компоненти геомагнітного поля. Для неї (рис. 4.24, з) виявлено збурення, що триває з 19:40 до 21:00. Воно також пов'язано із збільшенням магнітної активності [206]. Для нього спостерігалось невеличке зменшення  $\alpha_{\min}(t)$  (з 0.1 до 0.0),  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\alpha^*(t)$  (в діапазонах 0.8 – 0.6, 0.8 – 0.6 і 0.55 – 0.35 відповідно), майже лінійне невеличке зростання  $K_f(t)$  (з –0.5 до 0.0). Тут на відміну від D-компоненти всі мультифрактальні характеристики слабо флюктували біля своїх середніх значень за увесь шестичасовий період.

У день землетрусу (24 січня 2020 р.) для D-компоненти геомагнітного поля для збурень, що спостерігалися з 19:10 по 20:25 та є пов'язаними з магнітним ефектом землетрусу (рис. 4.20), спостерігалися зміни  $\alpha_{\min}(t)$  (у діапазоні від 0.0 до 0.2), зростання  $\alpha_{\max}(t)$  (від 0.6 до 1.0),  $\Delta\alpha(t)$  (від 0.5 до 0.9) і  $\alpha^*(t)$  (від 0.3 до 0.55).

У той же самий проміжок часу для H-компоненти спостерігалися (рис. 4.21) незначні варіації  $\alpha_{\min}(t)$ ,  $\alpha_{\max}(t)$  і  $\Delta\alpha(t)$ , утворення часового максимуму  $\alpha^*(t)$  (в діапазоні 0.25 – 0.45), а також часового мінімуму  $K_f(t)$  (в межах від 0.0 до –1.5).

Але найцікавішим, на нашу думку, у день землетрусу у поведінці мультифрактальних характеристик було те, що перед самим землетрусом приблизно за

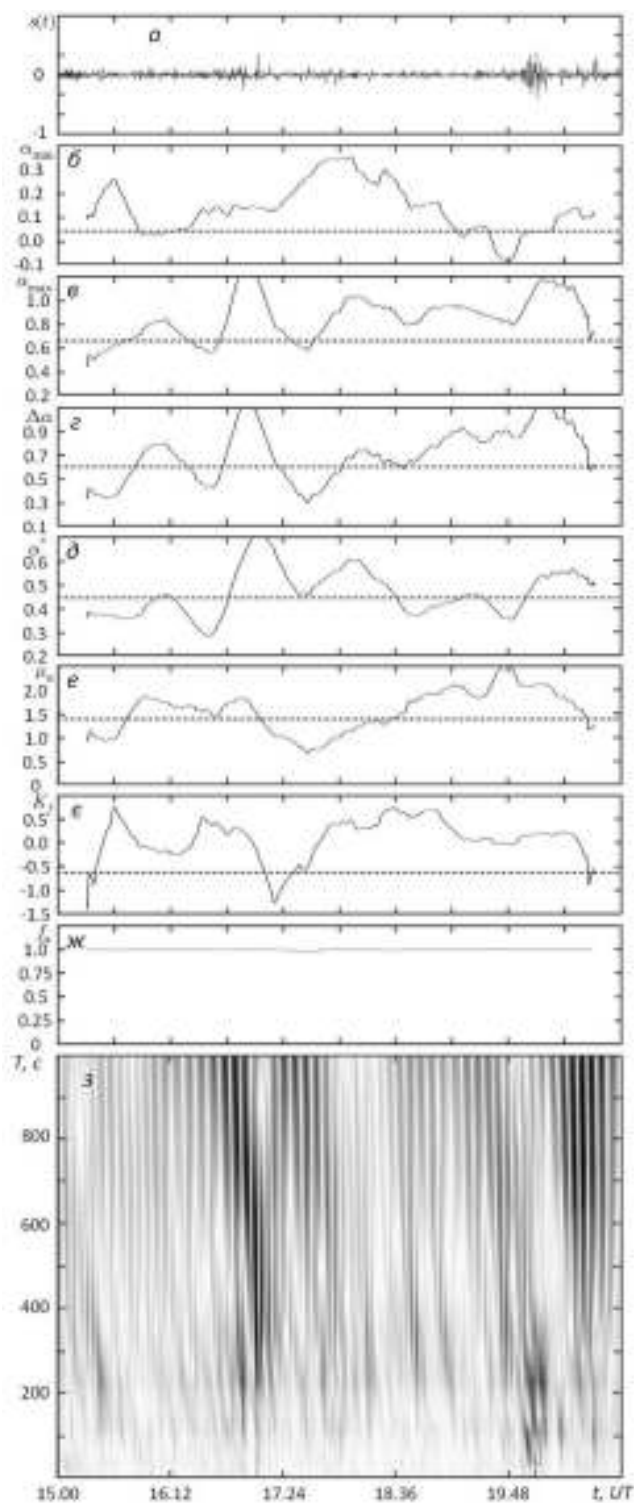


Рисунок 4.23 – Результати мультифрактального аналізу (метод MF DFA) часових варіацій геомагнітного поля 23 січня 2020 р. (D-компонента): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $\mu_{\alpha}(t)$  е –  $K_f(t)$ , ж –  $f_{\alpha}(t)$ , з – ФСГ БВП сигналу (вейвлет db4).

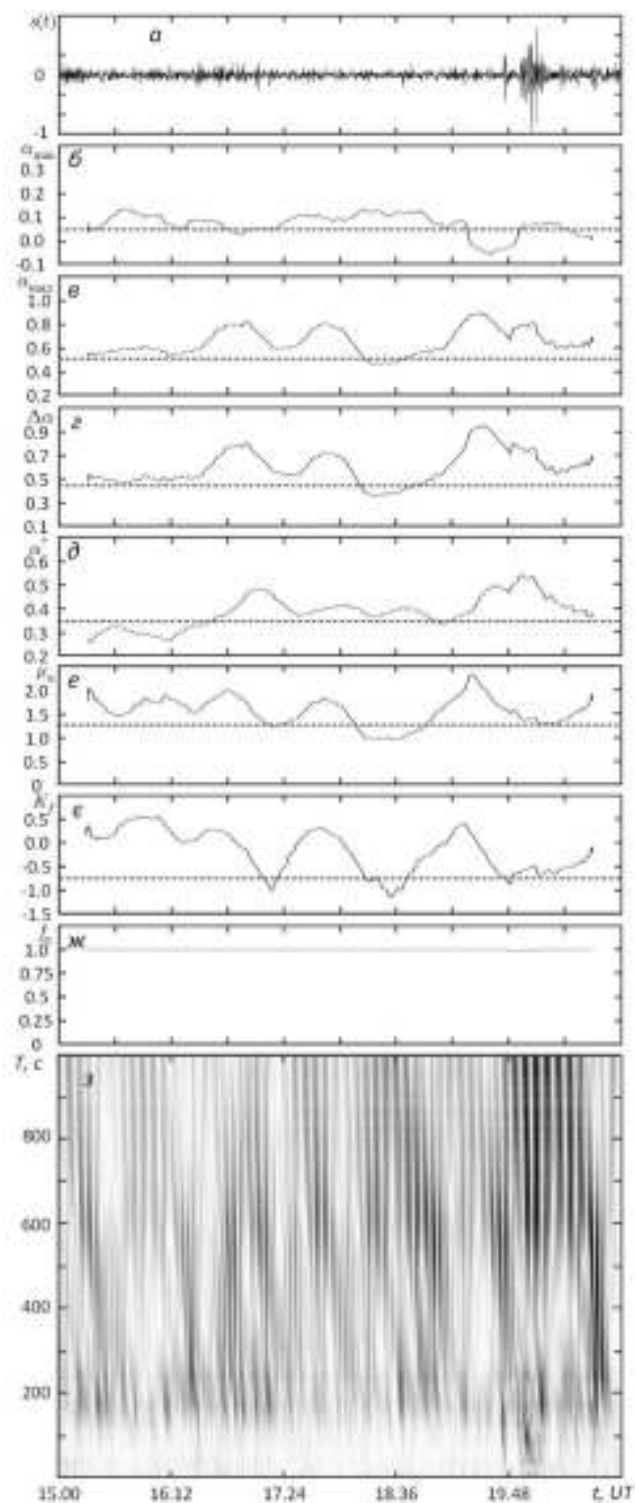


Рисунок 4.24 – Те ж саме (H-компонента).

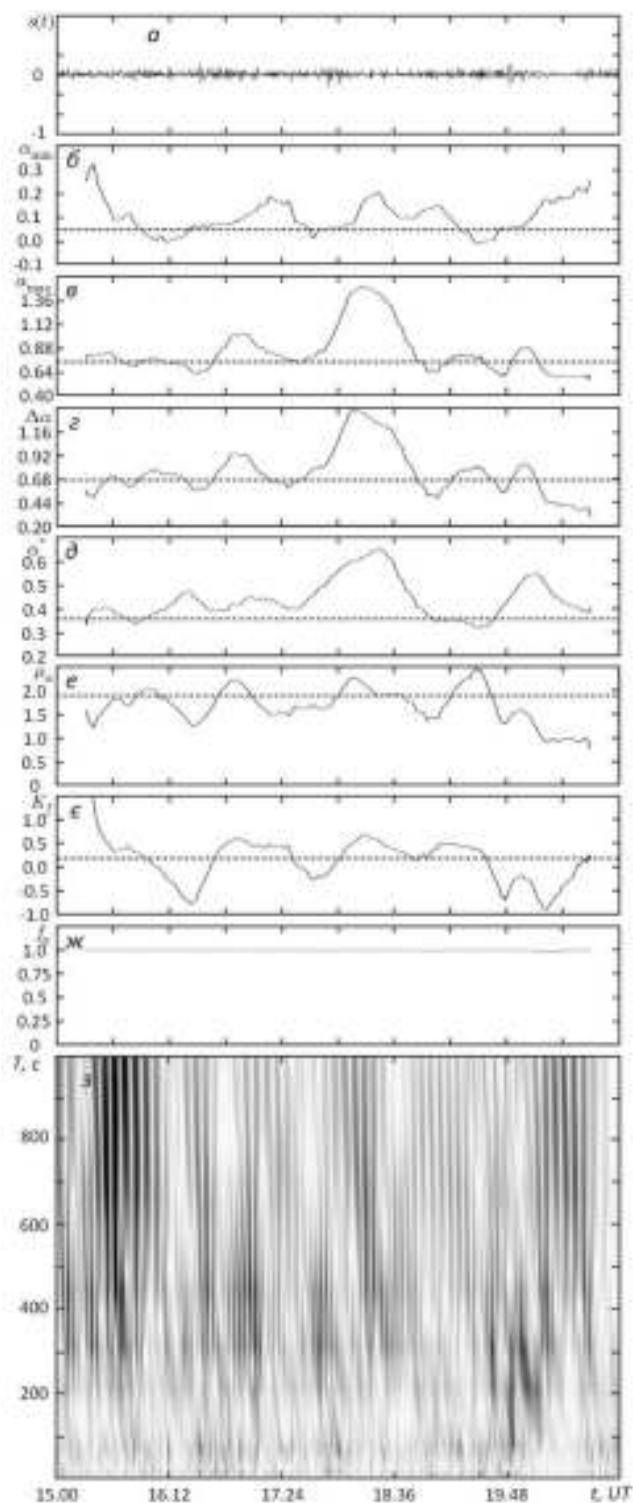


Рисунок 4.25 – Результати мультифрактального аналізу (метод MF DFA) часових варіацій геомагнітного поля 25 січня 2020 р. (D-компонента): а – сигнал у часовій області, б –  $\alpha_{\min}(t)$ , в –  $\alpha_{\max}(t)$ , г –  $\Delta\alpha(t)$ , д –  $\alpha^*(t)$ , е –  $\mu_\alpha(t)$ , є –  $K_f(t)$ , ж –  $f_\alpha(t)$ , з – ФСГ БВП сигналу (вейвлет db4).

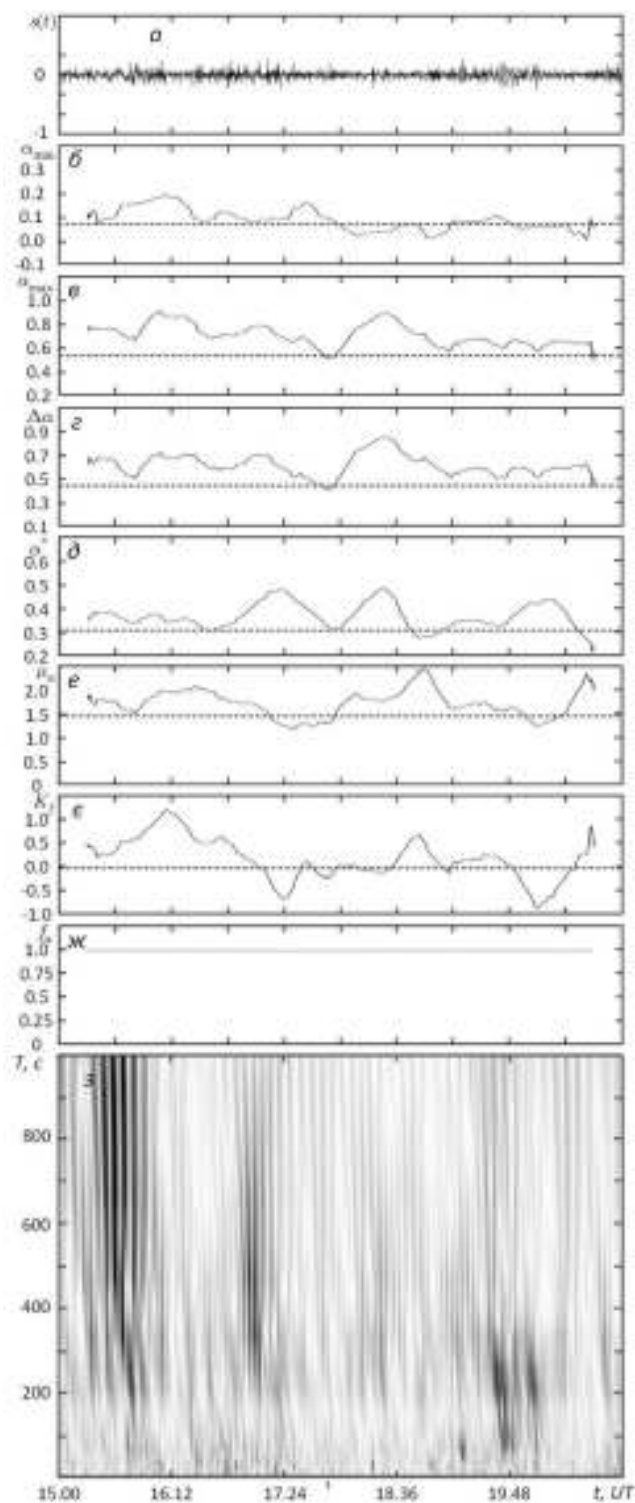


Рисунок 4.26 – Те ж саме (H-компонента).

півгодини в реєстраціях обох компонент з'являються «провали» у функції  $f_\alpha(t)$  (рис. 4.20, ж, рис. 4.21, ж), чого взагалі немає більше ніде у жоден з проаналізованих днів (рис. 4.23 – 4.29, ж). Ці «провали» супроводжуються для D-компоненти формуванням максимуму  $\alpha_{\min}(t)$  (у діапазоні від 0.05 до 0.25), мінімумів  $\alpha_{\max}(t)$  (від 0.3 до 0.6),  $\Delta\alpha(t)$  (від 0.2 до 0.55),  $K_f(t)$  (від 0.0 до  $-1.3$ ) і  $\mu_\alpha(t)$  (від 0.5 до 1.6), зниженням  $\alpha^*(t)$  (від 0.5 до 0.25); для H-компоненти формуванням мінімумів  $\alpha_{\max}(t)$  (від 0.3 до 0.5),  $\Delta\alpha(t)$  (від 0.2 до 0.5),  $\alpha^*(t)$  (від 0.2 до 0.4) і  $K_f(t)$  (від  $-0.5$  до  $-1.5$ )  $\mu_\alpha(t)$  (від 0.5 до 1.6). До того ж, як показують ФСГ БВП (рис. 4.20, з, рис. 4.21, з), у ці півгодини перед землетрусом активність у діапазоні періодів  $T = 15 - 1000$  с взагалі стала дуже малою.

Слід зазначити, що як у методі WTMM, так і у методі MF DFA використовувався метод КФ для мультифрактального аналізу, який докладно розглянуто у підрозділі 3.6.

#### **4.4.2. Обговорення результатів**

Обидва розглянуті збурення, що виявлено 23 січня 2020 р., мають досить подібний характер. Отримані особливості часових змін мультифрактальних параметрів можна пояснити наступним чином. В обох випадках з'являлося хвильове збурення у вигляді НШС процесу, який сам по собі можна розглядати як нефрактальний. Як було з'ясовано нами під час моделювання, проведеного у підрозділі 3.5, поява нефрактальної компоненти на тлі фрактального сигналу призводить до суттєвого зростання  $\alpha_{\max}(t)$ ,  $\Delta\alpha(t)$  і  $\alpha^*(t)$ . До того ж у багатьох випадках ці величини навіть можуть виходити за межі умов фрактальності ( $0 < \alpha < 1$ ). Тут таке спостерігалось для перших двох функцій. Якщо ж при цьому також не змінюється  $\alpha_{\min}(t)$ , то це нормальна реакція фрактального сигналу на появу адитивної нефрактальної складової. Але ж в обох розглянутих випадках спостерігалось невеличке зростання  $\alpha_{\min}(t)$ . Тобто можна зробити припущення, що параметри фрактальної складової



сигнала теж дещо змінилися, а це дає підстави казати про наявність не просто НШС процесу, а ФНШС процесу.

Тепер повернемося до «провалів» у функції  $f_\alpha(t)$ . Із фізичної точки зору отримані результати означають, що за півгодини до землетрусу за фактичної відсутності збурень відбулася істотна зміна фрактальних властивостей часових варіацій обох компонент геомагнітного поля. Типова мультифрактальна поведінка ( $\Delta\alpha \approx 0.5$ ,  $\alpha^* \approx 0.4$ ) різко змінюється на майже монофрактальну ( $\Delta\alpha \approx 0.2$ ,  $\alpha^* \approx 0.2$ ), що чітко фіксується падінням розмірності носія мультифрактала  $f_\alpha(t)$  відносно традиційного рівня одиниці. Зважаючи на результати мультифрактального аналізу модельних монофрактальних сигналів, проведеного у Розділі 3, слово «майже» можна викреслити, оскільки перетворення функції мультифрактального спектру на точку у випадку монофрактального сигналу відбувається лише в теорії для математичних фракталів, а не фізичних.

Отже, перед самим землетрусом мультифрактальний характер варіацій обох компонент геомагнітного поля змінився на монофрактальний, до того ж сильно антиперсистентний (фрактальна розмірність  $D = 2 - \alpha^* \approx 1.8$ ).

На жаль, ця особливість виявлена нами тільки для цього землетрусу, оскільки, наскільки нам відомо, ця мультифрактальна характеристика для інших землетрусів ще не досліджувалася. Майбутні дослідження варіацій геомагнітного поля, що виникають під час землетрусів, зможуть дати відповідь на питання, чи можна розглядати отриману особливість у якості «маркера» майбутнього землетрусу.

Варто підкреслити, що результати мультифрактального аналізу дуже добре збігаються їх результатами монофрактального аналізу, про які йшлося у попередньому пункті. Достатньо зазначити, що кореляція між часовою поведінкою узагальненого показника Херста  $\alpha^*(t)$  та показника Херста  $H(T, t)$  при  $T = 1000$  с є досить високою (коефіцієнт кореляції дорівнює приблизно 0.75 для обох компонент геомагнітного поля). Суттєвим доповненням до виявленого з використанням

монофрактального аналізу максимумів  $D_H(t)$  є той факт, що зростання  $D_H(t)$  (а відповідно й зменшення  $\alpha^*(t)$ ) супроводжувалося переходом мультифрактального процесу до монофрактального режиму. Також важливо, що для першого максимуму цей процес був краще виражений, ніж для другого: хоча звуження мультифрактального спектру  $\Delta\alpha(t)$  добре прослідковується в обох випадках, зменшення функції  $f_\alpha(t)$  у другому випадку є менш помітним. Останнє означає, що ступінь «монофракталізації» мультифрактального процесу у другому випадку була меншою. Можливо, це пов'язано з тим, що потужність афтершоку теж є меншою у порівнянні із першим поштовхом.

Таким чином, у доповнення до результатів ґрунтового аналізу [206] часо-періодної структури варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., досліджено їх фрактальну та мультифрактальну структуру. Встановлено, що виявлені НШС процеси, пов'язані як із передвісниками землетрусу, так і з його наслідками, є ФНШС процесами. Оцінено їх фрактальні та мультифрактальні характеристики. Виявлено, що за півгодини перед самим землетрусом відбувся перехід варіацій обох компонент геомагнітного поля до сильно антиперсистентного монофрактального режиму. Можливо, цей перехід можна буде використовувати у якості «маркера» близького землетрусу, але для підтвердження або спростування цього потрібні дослідження інших землетрусів.

#### 4.5. Висновки до четвертого розділу

1. Із застосуванням методів монофрактального та мультифрактального аналізів вперше досліджено сигнали гравітаційних хвиль, згенеровані під час процесу поєднання двох чорних дір у одну чорну діру, які було експериментально зареєстровано в Хенфорді та Лівінгстоні. Показано, що будучи створеними унікальним природним ЗСЧ НШС процесом, вони мають складну нестационарну мультифрактальну структуру. Оцінено мультифрактальні характеристики аналізованих сигналів. Так, з використанням методу WTMM встановлено, що величина узагальненого

показника Херста для обох реалізацій складає  $\alpha^* \approx 0.65$ , що досить добре узгоджується з оцінкою показника Херста ( $H \approx 0.55 \pm 0.10$ ), яку дав фрактальний аналіз. Отже, загалом обидві реалізації є слабо антиперсистентними. Ймовірно, що вони можуть перебувати під впливом адитивного білого гаусівського шуму, який, як відомо, має  $H = 0.5$ . Метод MF DFA показує, що обидва аналізовані сигнали можуть розглядатися в якості фрактальних приблизно в діапазоні безрозмірного часу  $t \in [0;6]$ , де умова фрактальності  $0 < \alpha^*(t) < 1$  добре задовольняється. Тут розташовується приблизно половина згаданого ЗСЧ НШС процесу Друга його половина виявилася нефрактальною. Але питання, чи є отримана фрактальна компонента частиною сигналу гравітаційних хвиль або чи вона є шумом зовсім іншого фізичного походження, на жаль, наразі залишається без відповіді.

2. Встановлено, що прямий та обернений акустичні НШС сигнали, згенеровані під час падіння Челябінського метеороїда, містять по два фрактальних ЗСЧ НШС процеси зі складною, нестационарною мультифрактальною структурою. Із використанням методів ДинФА, WTMM і MF DFA оцінено мультифрактальні характеристики даних сигналів та досліджено часову динаміку. Так, херстова розмірність  $D_H(t)$  першої пари ФНШС процесів обох сигналів змінюється приблизно у діапазоні 1.4 – 1.6, а другої – 1.5 – 1.7. У прямому сигналі перший ЗСЧ НШС процес має  $\alpha_{\min} = -0.05 - 0.15$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.40 - 0.80$ ,  $\alpha^* = 0.22 - 0.36$  і  $H = 0.35 - 0.60$ , а другий  $\alpha_{\min} = -0.10 - 0.11$ ,  $\alpha_{\max} = 0.18 - 0.62$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.58$ ,  $\alpha^* = 0.12 - 0.32$  і  $H = 0.30 - 0.65$ . У оберненому сигналі перший ЗСЧ НШС процес має  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.22 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.30 - 0.48$  і  $H = 0.38 - 0.60$ , а другий  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.34 - 0.88$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.21 - 0.48$  і  $H = 0.32 - 0.60$ . Всі чотири ЗСЧ НШС процеси є мультифрактальними та майже усюди антиперсистентними, хоча подекуди вони й наближались до монофрактального режиму ( $\Delta\alpha \leq 0.2$ ).

Скоріш за все, перший ЗСЧ НШС процес у кожній з двох аналізованих часових реалізацій є пов'язаним із генерацією та поширенням вибухової ударної хвилі. Існування ж другого ЗСЧ НШС процесу в обох реалізаціях може бути пояснено генерацією та поширенням балістичної хвилі. Отримані результати є свідченням особливої складності процесів, що відбуваються у системі ЗАІМ під дією такого потужного нестационарного джерела енерговиділення, як падіння метеороїдів.

3. У результаті всебічного аналізу часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі, яка відбулася 7 – 8 вересня 2017 р., із використанням методів часо-частотного (метод ССА), фрактального (метод ДинФА) та мультифрактального (метод MF DFA) встановлено наступне. Зареєстровані хвильові збурення мають у своєму складі низку УК НШС і ЗСЧ НШС процесів. Оцінено їх тривалості, діапазони періодів, показники широкосмуговості, динамічні показники широкосмуговості. Отримані дані додано до статистичної бази параметрів збурень магнітного поля Землі, що виникають у геокосмосі під дією потужних, нестационарних джерел енерговиділення. Виявлено, що виявлені хвильові збурення мають характерну мультифрактальну структуру. Оцінено набір відповідних мультифрактальних числових характеристик, досліджено їх часову динаміку. Продемонстровано, що досліджувані НШС процеси одночасно є й фрактальними процесами, а тому можуть бути віднесені до класу ФНШС процесів. Фактично всі виявлені збурення є мультифрактальними й у переважній більшості мають антиперсистентний характер ( $D_H > 1.5$ ,  $\alpha^* < 0.5$ ).

4. Завдяки застосуванню методів монофрактального (метод ДинФА з методом КФ) та мультифрактального (методи WTMM і MF DFA з методом КФ) аналізів досліджено фрактальні та мультифрактальні властивості часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р. у Туреччині. Оцінено фрактальні і мультифрактальні характеристики хвильових збурень із складу часо-періодної структури, отриманих іншими дослідниками, досліджено часову динаміку цих характеристик. Продемонстровано, що існуючі у збуреннях НШС процеси є ФНШС процесами. Виявлено особливості часової динаміки фрак-

тальних і мультифрактальних характеристик, що можуть бути пов'язані із передвісниками землетрусів. Так, перед самим землетрусом мультифрактальний характер варіацій обох компонент геомагнітного поля ( $\Delta\alpha \approx 0.5$ ,  $\alpha^* \approx 0.4$ ) змінився на монофрактальний ( $\Delta\alpha \approx 0.2$ ,  $\alpha^* \approx 0.2$ ), до того ж сильно антиперсистентний (фрактальна розмірність  $D = 2 - \alpha^* \approx 1.8$ ), що чітко фіксується падінням розмірності носія мультифрактала. Можливо, цей перехід можна буде використовувати у якості «маркера» близького землетрусу, але для підтвердження або спростування цього потрібні дослідження інших землетрусів. Також в обох компонентах геомагнітного поля був виявлений ще один, менш виражений перехід до монофрактального режиму, який відбувся вже після початку землетрусу і, можливо, був пов'язаний із афтершоком. Те, що ступінь «монофракталізації» мультифрактального процесу у другому випадку була меншою, можна пояснити меншою потужністю афтершоку у порівнянні із першим поштовхом.

**РОЗДІЛ 5.**  
**ДИСПЕРСІЙНІ СПОТВОРЕННЯ**  
**ФРАКТАЛЬНИХ НАДШИРОКОСМУГОВИХ СИГНАЛІВ**  
**У НАВКОЛОЗЕМНОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

Добре відомо (див, наприклад, [8, 207]), що основним ефектом, котрий виникає під час поширення НШС сигналів, які мають принципово дуже широкий модуль спектра ОПФ, у диспергуючих середовищах, є істотні дисперсійні спотворення.

Ретельна оцінка величини ефектів, що спостерігаються при поширенні УК НШС радіосигналів у навколоземній і міжпланетній плазмі, була проведена у 1990-х рр. (див., наприклад, [8]).

У той же час, ФНШС сигнали, що з'явилися в 2004 р., мають ще більш широкий модуль спектра ОПФ, ніж УК НШС сигнали. До того ж вони також мають фрактальні властивості. Яким чином це може вплинути на характер і величину виникаючих дисперсійних ефектів, до цього часу залишалось невідомим. Отже, даний розділ присвячено моделюванню поширення ФНШС радіосигналів у навколоземному середовищі. Отримані автором результати містяться у роботі [19]

### **5.1. Моделювання дисперсійних спотворень**

Як відомо (див., наприклад, [8]), при поширенні НШС сигналів у диспергуючих середовищах можуть виникати дисперсійні спотворення, які пов'язані з дисперсією фазової швидкості. Для дослідження дисперсійних спотворень ФНШС сигналів, що виникають під час їх поширення у навколоземному середовищі, будемо використовувати наступну модель [8].

Нехай середовище характеризується комплексною передаточною функцією виду:

$$\dot{K}(f, z) = K(f, z) \exp(-i\phi(f, z)),$$

де  $f$  – частота,  $z$  – просторова координата,  $\phi(f, z)$  – фаза.

Тоді напруженість електричного поля  $E(t, z)$  ФНШС сигналу у довільній точці ізотропного, однорідного, напівнескінченного ( $z$  є відстанню від межі середовища до даної точки,  $z \geq 0$ ) середовища у момент часу  $t$  дорівнює:

$$E(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{S}(f) \dot{K}(f, z) \exp(i2\pi ft) df, \quad (5.1)$$

де

$$\dot{S}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (5.2)$$

– спектр ОПФ сигналу,  $E_0(t) = E(t, 0)$  – амплітуда електричного поля на межі ( $z = 0$ ) середовища.

Для моделювання іоносферного середовища будемо застосовувати модель, яка вже добре зарекомендувала себе під час вивчення особливостей поширення УК НШС сигналів у таких середовищах [8].

Для моделювання іоносфери нижче головного максимуму іонізації використовуватимемо дві моделі шарів – лінійного та параболічного.

Для лінійного шару квадрат плазмової частоти дорівнюватиме:

$$f_p^2(z) = f_p^2(z_{\max}) \frac{z - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}},$$

а для параболічного –

$$f_p^2(z) = f_p^2(z_{\max}) \left[ 1 - \left( \frac{z_{\max} - z}{z_{\max} - z_{\min}} \right)^2 \right],$$

де  $z \in [z_{\min}, z_{\max}]$ ,  $z_{\min} = 100$  км,  $z_{\max} = 300$  км,  $f_p(z_{\max}) = 10$  МГц або  $\sqrt{10}$  МГц – плазмова частота в максимумі іонізації модельного шару для денної та нічної іоносфери відповідно.

Під час моделювання поширення високочастотних (ВЧ) ФНШС сигналів, у яких  $f_{\min} > f_p$ , в іоносферній, магнітосферній і міжпланетній плазмі будемо використовувати закон дисперсії [8]:

$$n^2(f) = 1 - \frac{f_p^2}{f^2}.$$

## 5.2. Результати моделювання дисперсійних спотворень фрактальних надширокопосмугових сигналів

Під час моделювання дисперсійних спотворень, що виникають протягом поширення ФНШС радіосигнала у іоносферній, магнітосферній і міжпланетній плазмі ми будемо використовувати модель детермінованого ФНШС сигнала  $FUWB_{1.5}(t)$ , яка задається співвідношенням (2.10) та вже добре зарекомендувала себе у розділах 2 і 3.

На рис. 5.1 проводиться порівняння цієї моделі (рис. 5.1, б), що має фрактальну розмірність  $D = 1.5$ , з моделлю нефрактального УК НШС сигнала (рис. 5.1, а) в часовій області, а також в частотній області, де дані моделі представлено їх модулями СФ ОПФ (рис. 5.1, в, г). Добре видно, що ФНШС сигнал має істотно ширший модуль СФ ОПФ, що може призвести до виникнення особливостей його дисперсійних спотворень порівняно з тими, що спостерігаються при поширенні УК НШС сигнала. Зауважимо, що час  $t$  і частоту  $f$  на рис. 5.1 показано у деяких безрозмірних одиницях.

Розглянемо спочатку ВЧ ФНШС сигнали, тобто сигнали, для яких  $f_{\min} > f_p$ . Такі сигнали, поширюючись у плазмовому шарі, проходять його наскрізь.

Для нефрактальних ВЧ УК НШС сигналів дисперсійні спотворення, що виникають під час їх поширення у плазмових середовищах, моделі яких розглянуто вище, у випадку врахування лише фазової дисперсії полягають у наступному [8]. Коли ВЧ УК НШС сигнал заглиблюється в плазмове середовище, виникає затримка переднього фронту сигнала  $\tilde{T}_f$  ( $\tilde{T} = t / \tau_{s0}$  – безрозмірний час,  $\tau_{s0}$  – початкова тривалість сигнала) та максимуму його обвідної  $\tilde{T}_m$  (коли така обвідна вже сформувалася), збільшується відносна тривалість сигнала  $\tau_s / \tau_{s0}$  ( $\tau_s$  – поточна тривалість сигнала) та зменшується відносна амплітуда сигнала у максимумі обвідної  $E_{\max} / E_{\max 0}$  ( $E_{\max}$  і  $E_{\max 0}$  – поточна та початкова амплітуди сигнала у максимумі обвідної). Величини цих ефектів залежать від подоланого у середовищі шляху



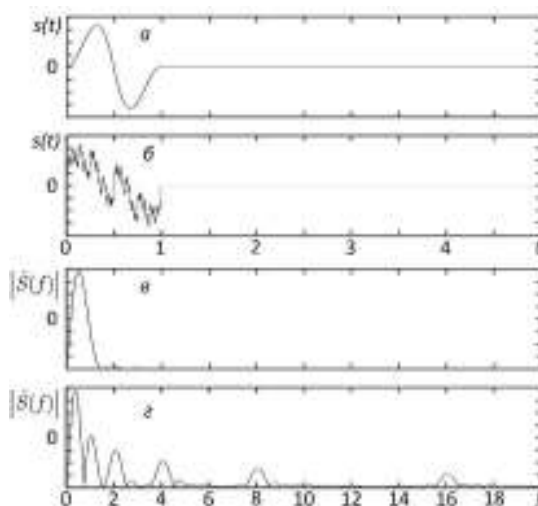


Рисунок 5.1 – Порівняння спектрів модельних УК НШС і ФНШС сигналів: а – УК НШС сигнал у часовій області, б – ФНШС сигнал у часовій області, в – модуль СФ ОПФ УК НШС сигнала, г – модуль СФ ОПФ ФНШС сигнала.

$z$ , обраної моделі плазмового шару та співвідношеннями між показником широко-смуговості сигнала  $\mu$ , середньою частотою його модуля СФ ОПФ  $f_0 = (f_{\min} + f_{\max}) / 2$  та плазмовою частотою  $f_p$ . Такі дисперсійні спотворення, які можна назвати «традиційними», можуть бути дуже значними. Наприклад, у денній іоносфері для ВЧ УК НШС сигнала з  $f_0 = 10^9$  Гц та  $\mu = 0.2 \dots 1.6$  ми маємо  $\tau_s/\tau_{s0} = 1.4 \dots 68$ ,  $\check{T}_f = 3.4 \dots 6.6$ ,  $\check{T}_m = 3.8 \dots 16.8$ ,  $E_{max}/E_{max0} = 0.75 \dots 0.21$ , а з  $f_0 = 10^{10}$  Гц та  $\mu = 0.2 \dots 1.6$   $-\tau_s/\tau_{s0} = 1.0 \dots 1.6$ ,  $\check{T}_f = 0.0 \dots 1.0$ ,  $\check{T}_m = 0.3 \dots 2.0$ ,  $E_{max}/E_{max0} = 1.00 \dots 0.55$ .

Динаміка цих спотворень з кроком по висоті  $\Delta z = 10$  км для ВЧ УК НШС сигнала, вигляд якого у часовій області показано на рис. 5.1, а, у випадку  $f_0 = 10^{10}$  Гц та  $\mu = 1.57$  продемонстрована на рис. 5.2, а у випадку  $f_0 = 10^9$  Гц та  $\mu = 1.57$  – на рис. 5.3.

Встановлено [19], що для ВЧ ФНШС сигнала дисперсійні спотворення за цих самих умов мають дещо інший характер, в них спостерігаються істотні особливості. Даючи пояснення цьому факту, необхідно зважати на те, що модуль СФ ОПФ для ФНШС сигнала (рис. 5.1, г) істотно відрізняється від того, що має УК НШС

сигнал (рис. 5.1, в), не тільки, тим, що вона не тільки ширша, а й складніша за структурою, а найголовніше, тим, що вона сама має фрактальні властивості. Отже, ці особливості полягають у наступному.

По-перше, у випадку ВЧ ФНШС сигнала виникають всі ті дисперсійні спотворення, що спостерігалися й для ВЧ УК НШС сигнала. Але при цьому головна фрактальна структура ФНШС сигнала, яка формується найбільш високочастотною частиною спектра ОПФ, майже не відчуває ніяких змін. Більше того, як це добре продемонстровано на рис. 5.6, залишаючись фрактальною ( $0 < H < 1$ ), ця фрактальна структура продовжує займати свої початкове положення в сигналі, а її показник Херста  $H$  трошки зменшується із зростанням подоланого сигналом у середовищі  $z$ . Інші частини сигнала, що поступово відстають від фрактальної структури, самі виявляються нефрактальними ( $H \geq 1$ ). Оскільки показник Херста оцінювався нами у ковзаючому у часовій області вікні з шириною  $\Delta \tilde{T} = 1$ , він став функцією часу  $H(t)$ .

По-друге, поширюючись середовищем, ВЧ ФНШС сигнал поступово набуває амплітудної модуляції (рис. 5.5). Скоріш за все, це пояснюється складною фрактальною структурою його СФ ОПФ.

По-третє, для ВЧ ФНШС сигнала (рис. 5.4, а) описані вище дисперсійні спотворення виявляються більш значними, ніж для ВЧ УК НШС сигнала (рис. 5.2, а) з аналогічними параметрами. Це добре видно, якщо порівняти рис. 5.2 з рис. 5.4, а рис. 5.3 з рис. 5.5. Цей факт можна пояснити тим, що маючи однакову центральну частоту модуля СФ ОПФ  $f_0$ , сигнали відрізняються шириною спектра ОПФ. Отже, ФНШС сигнал має більше значення показника широкосмуговості  $\mu$  ( $\mu_{FUWB} = 1.84$ ), ніж УК НШС сигнал ( $\mu_{UWB} = 1.57$ ).

Але порівнювати у даному випадку можна тільки величини відносних тривалостей сигналів  $\tau_s / \tau_{s0}$ , оскільки оцінювати затримки переднього фронту сигнала  $\tilde{T}_f$  та максимуму його обвідної  $\tilde{T}_m$ , а також зменшення відносної амплітуди сигнала у максимумі обвідної  $E_{\max} / E_{\max 0}$  є некоректним через складну структуру

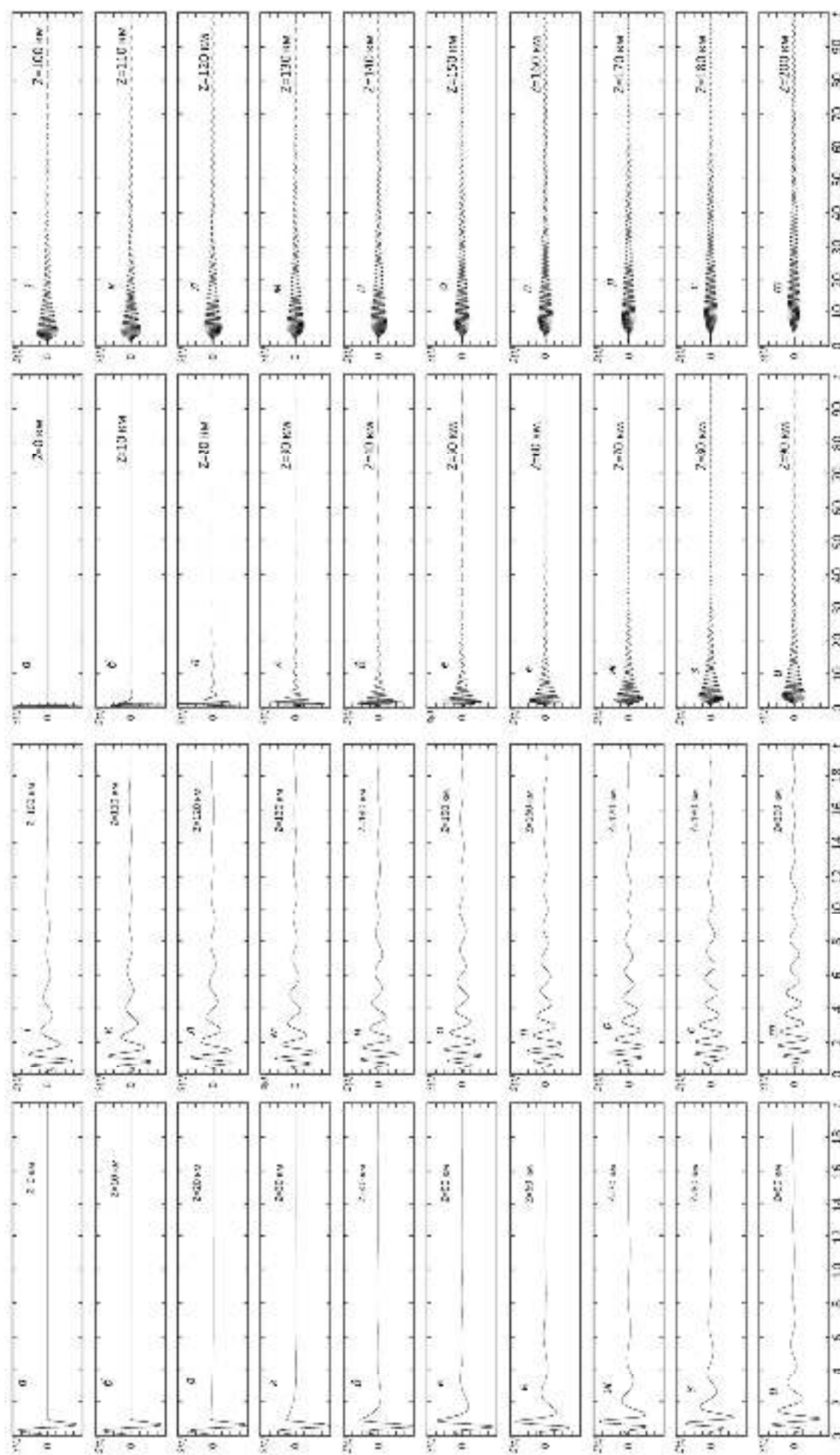


Рисунок 5.2 – Дисперсійні спостереження параболічного ВЧ УК НПС сигналу

( $D = 1.0$ ,  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.57$ ), що виникають у параболічному плазмовому парі ( $f_p(z_{\text{max}}) = 10^7$  Гц,  $z_{\text{max}} = 200$  км) для різних величин шляху  $z$ .

Рисунок 5.3 – Дисперсійні спостереження параболічного ВЧ УК НПС сигналу

( $D = 1.0$ ,  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.57$ ), що виникають у параболічному плазмовому парі ( $f_p(z_{\text{max}}) = 10^7$  Гц,  $z_{\text{max}} = 200$  км) для різних величин шляху  $z$ .

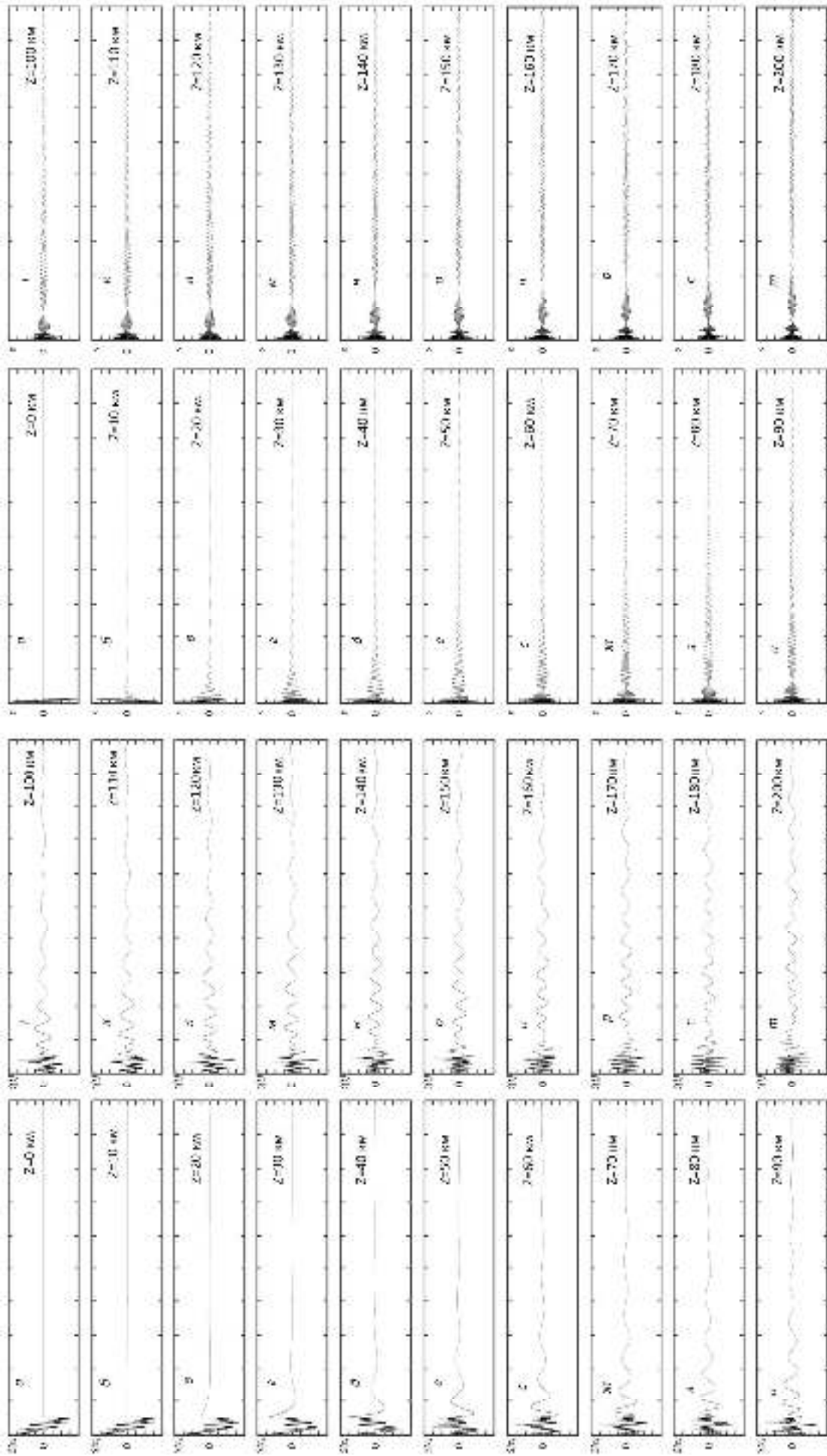


Рисунок 5.4 – Дисперсійні спотворення ВЧ ФНПС сигналу ( $D = 1.5$ ).

$f_0 = 10^{20}$  Гц,  $\mu = 1.84$ ), що виникають у параболічному плазмовому шарі

$(f_p(z_{\max}) = 10^7 \text{ Гц}, z_{\max} = 200 \text{ км})$  для різних величин пологого шляху  $Z$ .

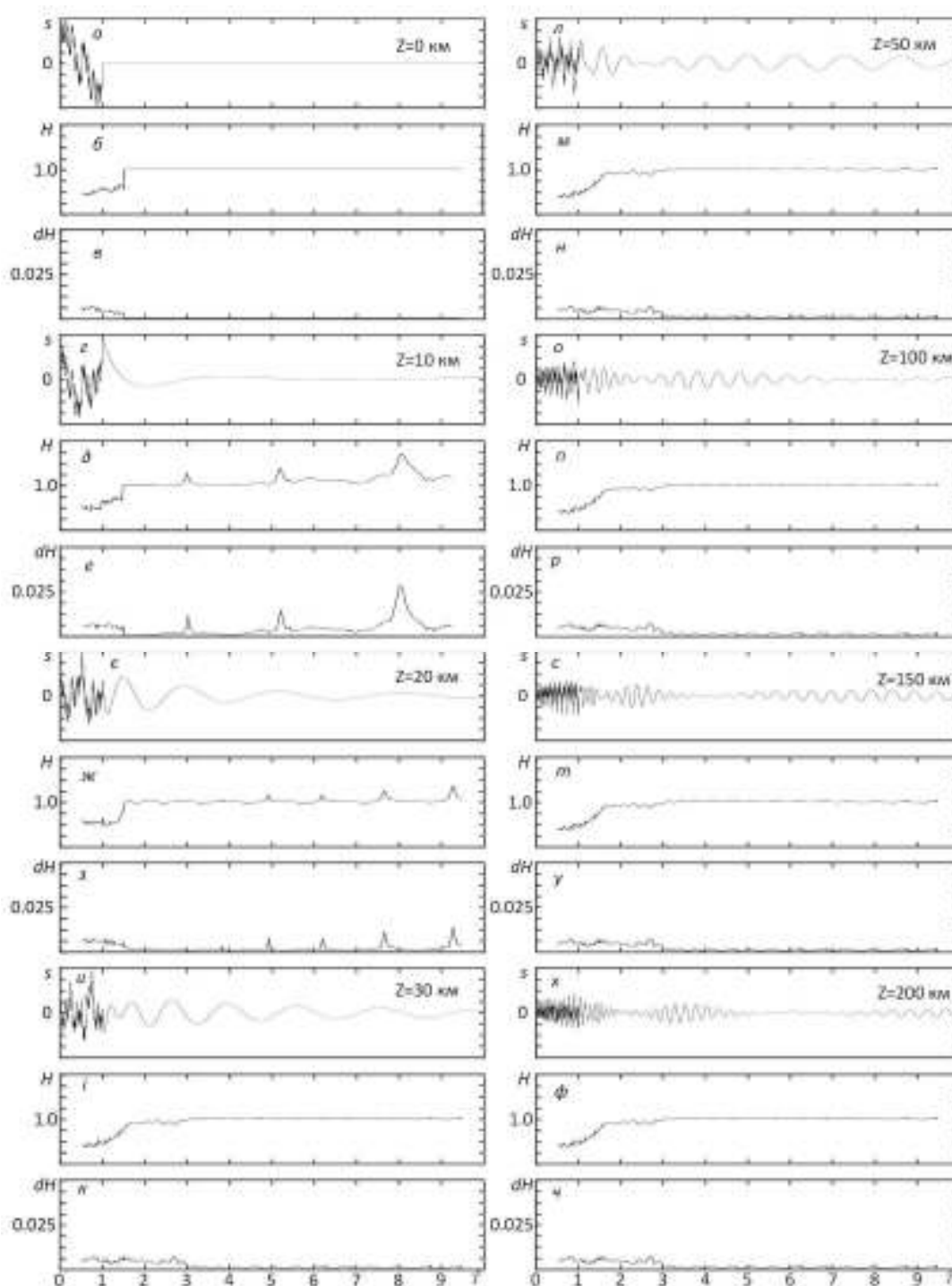


Рисунок 5.6 – Дисперсійні спотворення ВЧ ФНШС сигнала ( $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.84$ ), що виникають у параболічному плазмовому шарі ( $f_p(z_{\max}) = 10^7$  Гц,  $z_{\max} = 200$  км), динамічний показник Херста  $H(t)$  та його похибка  $dH(t)$  для різних величин подоланого сигналом шляху  $z$ : а, б, в –  $z = 0$  км; г, д, е –  $z = 10$  км; є, ж, з –  $z = 20$  км; и, і, к –  $z = 30$  км; л, м, н –  $z = 50$  км; о, п, р –  $z = 100$  км; с, т, у –  $z = 150$  км; х, ф, ч –  $z = 200$  км.

(фактично розділені фрактальна та нефрактальна компоненти) диспергованого ВЧ ФНШС сигналу.

Розрахунки показали, що для параболічного шару з  $f_p(z_{\max}) = 10^7$  Гц,  $z_{\max} = 200$  км та ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ УК НШС сигналом з  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно вдвічі (з 10 до 20). У тих же умовах для ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ УК НШС сигналом з  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно 2.3 рази (з 60 до 140).

### 5.3. Висновки до п'ятого розділу

1. Характер дисперсійних спотворень, що виникають під час поширення ВЧ ФНШС сигналу у іоносфері Землі, модельованій параболічним шаром, дещо відрізняється від того, що відбувається з нефрактальним ВЧ НШС сигналом. Основна фрактальна структура ВЧ ФНШС сигналу, що поширюється у плазмовому середовищі, де існує виключно дисперсія фази, залишається майже неушкодженою.

Залишаючись фрактальною ( $0 < H < 1$ ), ця фрактальна структура продовжує займати свої початкове положення в сигналі, а її показник Херста  $H$  трошки зменшується із зростанням подоланого сигналом у середовищі. Інші частини сигналу, що поступово відстають від фрактальної структури, самі виявляються нефрактальними ( $H \geq 1$ ). Більш низькочастотна складова ВЧ ФНШС сигналу відчуває дисперсійні спотворення, аналогічні тим, що спостерігаються для нефрактальних УК НШС сигналів. ФНШС сигнал нібито розпадається на дві частини – фрактальну та нефрактальну. До того ж із збільшенням відстані, що подолано у диспергуючому середовищі, нефрактальна частина поступово все більше і більше відстає від фрактальної.

2. Розрахунки показали, що для параболічного шару з  $f_p(z_{\max}) = 10^7$  Гц,  $z_{\max} = 200$  км та ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ ФНШС сигналом з  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно вдвічі (з 10 до 20). У тих же умовах для ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ ФНШС сигналом з  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно 2.3 рази (з 60 до 140).

3. Через фрактальність модуля СФ ОПФ в результаті дисперсійних спотворень, що виникають під час поширення ВЧ ФНШС сигналу у плазмовому середовищі, він набуває амплітудної модуляції у часовій області.

4. Оскільки за однакових значень середньої частоти модуля СФ ОПФ ФНШС сигнал має істотно більший показник широкосмуговості, ніж УК НШС сигнал, дисперсійні спотворення ФНШС сигналу виявляються більш істотними.

## ВИСНОВКИ

1. Розроблено новий комплексний метод фрактального аналізу – узагальнений фрактальний аналіз, який забезпечує отримання різнобічних характеристик досліджуваних сигналів або процесів. Основна ідея метода полягає у тому, щоб отримати достатню кількість інформації про їх фрактальну структуру та характер її змін у часі шляхом вивчення цілого набору числових характеристик та їх порівняння між собою. Використовуються прямі та спектральні характеристики, а також характеристики фазового простору. За інформативністю метод УФА значно перевищує решту існуючих методів монофрактального аналізу сигналів и процесів, оскільки він пропонує дослідження цілих шістнадцяти характеристик: восьми фрактальних розмірностей як прямих характеристик, семи – як спектральних характеристик та фрактальної розмірності атратора динамічної системи, здатної породити такий сигнал. Натомість для решти методів фрактального аналізу зазвичай застосовується максимум дві-три подібних характеристики.

2. Створено новий спеціальний комплексний метод фрактального аналізу – динамічний фрактальний аналіз, який дозволяє враховувати наявність в аналізованому сигналі часо-частотних структур і використовувати їх параметри під час оцінювання фрактальної розмірності. Запропонований метод вперше поєднує між собою методи фрактального та часо-частотного аналізу, коли оцінки, отримані в одному з них, використовуються для покращення результатів іншого.

3. Створено набір нових моделей ФНШС сигналів. З їх використанням досліджено ефективність оцінювання ємнісної, варіаційної та клітинної фрактальних розмірностей. Встановлено, що клітинна розмірність  $D_B$  дає найкращий результат у діапазоні  $1 \leq D \leq 1.3$ , варіаційна розмірність  $D_V$  – для  $1.3 < D \leq 1.6$ , а регуляризаційна розмірність  $D_R$  – для  $1.6 < D < 2$ . Виявлено та досліджено нелінійний характер залежності точності отримуваних оцінок вказаних фрактальних розмірностей від їх відомого істинного значення, а також від кількості відліків дискретного вектора даних досліджуваного модельного сигналу. На прикладі аналізу ФСГ ОПФ і ФСГ БВП продемонстровано, що частотна та часо-частотна структури модельного



фрактального сигналу також мають фрактальні властивості. Для нефрактальних сигналів таких властивостей, як і очікувалося, немає.

4. Для покращення точності оцінки фрактальних і мультифрактальних характеристик досліджуваних сигналів і процесів у методах фрактального та мультифрактального аналізів вперше запропоновано універсальний метод, названий методом коригуючої функції. Метод КФ дозволяє компенсувати завжди існуючу нелінійність залежності між істинним значенням фрактальної розмірності та її оцінкою, здійсненою з використанням обраного методу фрактального аналізу сигналів і процесів за відомої кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного сигналу. Ідея методу полягає у побудові та застосуванні спеціальної КФ з використанням набору модельних ФС із заздалегідь відомими значеннями фрактальної розмірності. Із використанням спеціально розробленого оригінального набору модельних фрактальних, мультифрактальних, а також фрактальних надширокосмугових сигналів продемонстровано корисність та ефективність даного методу.

5. Із використанням методу КФ для монофрактального аналізу у рамках двох різних стратегій зменшення кількості відліків дискретного вектору даних досліджуваного модельного сигналу для клітинної  $D_B$ , варіаційної  $D_V$ , регуляризаційної  $D_R$  та херстової  $D_H$  фрактальних розмірностей відшукано мінімальну кількість відліків  $N_{\min}$ , за якої ще можна оцінювати відповідні розмірності. Встановлено, що  $N_{\min}$  дорівнює 64 для  $D_H$  і  $D_R$ , 512 для  $D_B$  та 256 для  $D_V$  у рамках «стратегії децимації» та 32 для  $D_H$  і  $D_R$ , 256 для  $D_B$  та 64 для  $D_V$  у рамках «стратегії звуження вікна».

6. За умов використання мінімально дозволеної кількості відліків  $N_{\min}$  завдяки застосуванню методу КФ для монофрактального аналізу максимальне відхилення оцінюваної фрактальної розмірності від істинного відомого значення, яке дорівнювало 1) у рамках «стратегії децимації» для  $D_B$  23%, для  $D_R$  32%, для  $D_V$  56%, для  $D_H$  27% до %; 2) у рамках «стратегії звуження вікна» для  $D_B$  23%, для  $D_R$  21%, для  $D_V$  12%, для  $D_H$  31%, тепер не перевищує 5 – 7 %, а самі істинні

значення даних фрактальних розмірностей впевнено потрапляють до довірчого інтервалу отриманої оцінки, побудованого для рівня надійності 0.9.

7. Продемонстровано, що застосування методу КФ для мультифрактального аналізу дозволило істотно знизити відхилення отримуваної оцінки узагальненого показника Херста від істинної відомої величини показника Гельдера аналізованого сигналу. Так, за мінімальної дозволеної кількості дискретних відліків даних аналізованого сигналу ( $N_{\min} = 32$ ) у діапазоні  $\alpha = 0.2 - 0.8$  відхилення скорегованого значення узагальненого показника Херста від істинного значення  $\alpha$  складає лише  $8 \div 3$  %, а саме істинне значення  $\alpha$  стабільно потрапляє у середину довірчого інтервалу (рівень надійності складає 0.9). Натомість без використання методу КФ згадане максимальне відхилення в указаному діапазоні  $\alpha$  складає  $90 \div 5$  %.

8. Запропоновано нові числові характеристики, що є корисними для проведення мультифрактального аналізу сигналів і процесів, обґрунтовано доцільність їх створення, продемонстровано корисність та ефективність. До них належать коефіцієнт асиметрії функції мультифрактального спектру, показник відносної ширини мультифрактального спектру та розмірність носія мультифракталу.

9. Із використанням методів WTMM і MF DFA проведено мультифрактальний аналіз набору модельних ФС і МФС. Виявлено особливості мультифрактального аналізу монофрактальних, мультифрактальних і нефрактальних сигналів і процесів, сформульовано відповідні рекомендації для практиків. Розроблено зручні формати представлення результатів аналізу.

10. Встановлено, що під час переходу МФС до монофрактального режиму функція мультифрактального спектру фізичного фракталу не колапсує у точку, як це має відбуватися у теорії для математичного фракталу. Натомість ознаками появи такого переходу є зменшення  $\Delta\alpha$  і  $\mu_\alpha$ , а також виконання умови  $f_\alpha < 1$ . Результати моделювання свідчать, що на практиці режим вже можна вважати монофрактальним, якщо  $\Delta\alpha \leq 0.2$  і  $\mu_\alpha \leq 0.25$  навіть коли  $f_\alpha = 1$ .

11. Продемонстровано, що мультифрактальний аналіз нефрактальних сигналів призводить до появи мультифрактальних спектрів із аномальними значеннями

мультифрактальних характеристик. По-перше, такі спектри суттєво порушують умови фрактальності ( $0 < \alpha^* < 1$ ) для узагальненого показника Херста, який завжди для них  $\alpha^* > 1$ . По-друге, вони також виявляються дуже широкими ( $\Delta\alpha \geq 1$ ), а сам нефрактальний сигнал у мультифрактальному спектрі формально поводить себе як монофрактальна складова з  $\alpha_0 > 1$ .

12. Доведено на практичних прикладах, що існуючі в літературі поради усувати з аналізованого сигналу всі тренди (як періодичні, так і неперіодичні) є дещо категоричними. Дослідник має бути впевнений, що усунувши тренд, він не знищить сам досліджуваний процес, оскільки тренд може виявитись невід'ємною частиною досліджуваного процесу.

13. На базі нових запропонованих методів, а також низки нових мультифрактальних характеристики сконструйовано зручні та ефективні алгоритми проведення фрактального та мультифрактального аналізів експериментальних даних, які можна рекомендувати до використання дослідникам. Із використанням набору модельних та реальних фрактальних і мультифрактальних сигналів і процесів продемонстровано можливості створених алгоритмів.

14. Із використанням запропонованих алгоритмів фрактального та мультифрактального аналізів отримано нову корисну інформацію про особливості фрактальної структури низки процесів геокосмосу, які є його реакцією на дію потужних, нестационарних джерел енерговиділення (гравітаційна хвиля, падіння Челябінського метеороїда, надпотужна геокосмічна буря, потужний землетрус). Встановлено, що досліджені процеси належать до класу фрактальних надширококустових процесів.

15. Із застосуванням методів монофрактального та мультифрактального аналізів вперше досліджено сигнали гравітаційних хвиль, згенеровані під час процесу поєднання двох чорних дір у одну чорну діру, які було експериментально зареєстровано в Хенфорді та Лівінгстоні. Показано, що будучи створеними унікальним природним ЗСЧ НШС процесом, вони мають складну нестационарну мультифрактальну структуру.

тальну структуру. Оцінено мультифрактальні характеристики аналізованих сигналів. Так, з використанням методу WTMM встановлено, що величина узагальненого показника Херста для обох реалізацій складає  $\alpha^* \approx 0.65$ , що досить добре узгоджується з оцінкою показника Херста ( $H \approx 0.55 \pm 0.10$ ), яку дав фрактальний аналіз. Отже, загалом обидві реалізації є слабо антиперсистентними. Ймовірно, що вони можуть перебувати під впливом адитивного білого гаусівського шуму, який, як відомо, має  $H = 0.5$ . Метод MF DFA показує, що обидва аналізовані сигнали можуть розглядатися в якості фрактальних приблизно в діапазоні безрозмірного часу  $t \in [0;6]$ , де умова фрактальності  $0 < \alpha^*(t) < 1$  добре задовольняється. Тут розташовується приблизно половина згаданого ЗСЧ НШС процесу Друга його половина виявилася нефрактальною. Але питання, чи є отримана фрактальна компонента частиною сигналу гравітаційних хвиль або чи вона є шумом зовсім іншого фізичного походження, на жаль, наразі залишається без відповіді.

16. Встановлено, що прямий та обернений акустичні НШС сигнали, згенеровані під час падіння Челябінського метеороїда, містять по два фрактальних ЗСЧ НШС процеси зі складною, нестационарною мультифрактальною структурою. Із використанням методів ДинФА, WTMM і MF DFA оцінено мультифрактальні характеристики даних сигналів та досліджено часову динаміку. Так, херстова розмірність  $D_H(t)$  першої пари ФНШС процесів обох сигналів змінюється приблизно у діапазоні 1.4 – 1.6, а другої – 1.5 – 1.7. У прямому сигналі перший ЗСЧ НШС процес має  $\alpha_{\min} = -0.05 - 0.15$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.40 - 0.80$ ,  $\alpha^* = 0.22 - 0.36$  і  $H = 0.35 - 0.60$ , а другий  $\alpha_{\min} = -0.10 - 0.11$ ,  $\alpha_{\max} = 0.18 - 0.62$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.58$ ,  $\alpha^* = 0.12 - 0.32$  і  $H = 0.30 - 0.65$ . У оберненому сигналі перший ЗСЧ НШС процес має  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.40 - 0.85$ ,  $\Delta\alpha = 0.22 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.30 - 0.48$  і  $H = 0.38 - 0.60$ , а другий  $\alpha_{\min} = 0.00 - 0.36$ ,  $\alpha_{\max} = 0.34 - 0.88$ ,  $\Delta\alpha = 0.18 - 0.82$ ,  $\alpha^* = 0.21 - 0.48$  і  $H = 0.32 - 0.60$ . Всі чотири ЗСЧ НШС процеси є мультифра-

ктальними та майже усюди антиперсистентними, хоча подекуди вони й наближалися до монофрактального режиму ( $\Delta\alpha \leq 0.2$ ). Скоріш за все, перший ЗСЧ НШС процес у кожній з двох аналізованих часових реалізацій є пов'язаним із генерацією та поширенням вибухової ударної хвилі. Існування ж другого ЗСЧ НШС процесу в обох реалізаціях може бути пояснено генерацією та поширенням балістичної хвилі. Отримані результати є свідченням особливої складності процесів, що відбуваються у системі ЗАІМ під дією такого потужного нестационарного джерела енерговиділення, як падіння метеороїдів.

17. У результаті всебічного аналізу часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі, яка відбулася 7 – 8 вересня 2017 р., із використанням методів часо-частотного (метод ССА), фрактального (метод ДинФА) та мультифрактального (метод MF DFA) встановлено наступне. Зареєстровані хвильові збурення мають у своєму складі низку УК НШС і ЗСЧ НШС процесів. Оцінено їх тривалості, діапазони періодів, показники широкосмуговості, динамічні показники широкосмуговості. Отримані дані додано до статистичної бази параметрів збурень магнітного поля Землі, що виникають у геокосмосі під дією потужних, нестационарних джерел енерговиділення. Виявлено, що виявлені хвильові збурення мають характерну мультифрактальну структуру. Оцінено набір відповідних мультифрактальних числових характеристик, досліджено їх часову динаміку. Продемонстровано, що досліджувані НШС процеси одночасно є й фрактальними процесами, а тому можуть бути віднесені до класу ФНШС процесів. Фактично всі виявлені збурення є мультифрактальними й у переважній більшості мають антиперсистентний характер ( $D_H > 1.5$ ,  $\alpha^* < 0.5$ ).

18. Завдяки застосуванню методів монофрактального (метод ДинФА з методом КФ) та мультифрактального (методи WTMM і MF DFA з методом КФ) аналізів досліджено фрактальні та мультифрактальні властивості часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р. у Туреччині. Оцінено фрактальні і мультифрактальні характеристики хвильових збурень із складу часо-періодної структури, отриманих іншими дослідниками, досліджено часову динаміку цих характеристик. Продемонстровано, що існуючи у збуреннях

НШС процеси є ФНШС процесами. Виявлено особливості часової динаміки фрактальних і мультифрактальних характеристик, що можуть бути пов'язані із передвісниками землетрусів. Так, перед самим землетрусом мультифрактальний характер варіацій обох компонент геомагнітного поля ( $\Delta\alpha \approx 0.5$ ,  $\alpha^* \approx 0.4$ ) змінився на монофрактальний ( $\Delta\alpha \approx 0.2$ ,  $\alpha^* \approx 0.2$ ), до того ж сильно антиперсистентний (фрактальна розмірність  $D = 2 - \alpha^* \approx 1.8$ ), що чітко фіксується падінням розмірності носія мультифрактала. Можливо, цей перехід можна буде використовувати у якості «маркера» близького землетрусу, але для підтвердження або спростування цього потрібні дослідження інших землетрусів. Також в обох компонентах геомагнітного поля був виявлений ще один, менш виражений перехід до монофрактального режиму, який відбувся вже після початку землетрусу і, можливо, був пов'язаний із афтершоком. Те, що ступінь «монофракталізації» мультифрактального процесу у другому випадку була меншою, можна пояснити меншою потужністю афтершоку у порівнянні із першим поштовхом.

19. Вперше досліджено характер та отримано оцінки величини дисперсійних спотворень ВЧ ФНШС сигналів, що є корисними, зокрема, під час досліджень доцільності й ефективності застосування таких сигналів для розв'язання задач радіолокації, радіонавігації, дистанційного радіозондування, телекомунікації та зв'язку і т. і.

20. Встановлено, що характер дисперсійних спотворень, які виникають під час поширення ВЧ ФНШС сигнала у іоносфері Землі, модельованій параболічним шаром, дещо відрізняється від того, що відбувається з нефрактальним ВЧ НШС сигналом. Основна фрактальна структура ВЧ ФНШС сигнала, що поширюється у плазмовому середовищі, де існує виключно дисперсія фази, залишається майже нешкодженою. Залишаючись фрактальною ( $0 < H < 1$ ), ця фрактальна структура продовжує займати свої початкове положення в сигналі, а її показник Херста  $H$  трошки зменшується із зростанням подоланого сигналом у середовищі. Інші частини сигнала, що поступово відстають від фрактальної структури, самі виявляються нефрактальними ( $H \geq 1$ ). Більш низькочастотна складова ВЧ ФНШС сиг-

нала відчуває дисперсійні спотворення, аналогічні тим, що спостерігаються для нефрактальних УК НШС сигналів. ФНШС сигнал нібито розпадається на дві частини – фрактальну та нефрактальну. До того ж із збільшенням відстані, що подолано у диспергуючому середовищі, нефрактальна частина поступово все більше і більше відстає від фрактальної.

21. Показало, що для параболічного шару з  $f_p(z_{\max}) = 10^7$  Гц,  $z_{\max} = 200$  км та ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ ФНШС сигналом з  $f_0 = 10^{10}$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно вдвічі (з 10 до 20). У тих же умовах для ВЧ ФНШС сигналу з  $D = 1.5$ ,  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.84$  у порівнянні з нефрактальним ВЧ ФНШС сигналом з  $f_0 = 10^9$  Гц,  $\mu = 1.57$  величина  $\tau_s / \tau_{s0}$  збільшується приблизно 2.3 рази (з 60 до 140).

Отримана у даній дисертаційній роботі інформація є вкрай важливою для успішного розв'язання проблеми створення глобальної міжнародної системи оперативного моніторингу стану геокосмосу, що стоїть перед людством.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Черногор Л. Ф., Домнин И. Ф. Физика геокосмических бурь: монография. Харьков, 2014. 408 с.
2. Черногор Л. Ф. Физика и экология катастроф: монография. Харьков, 2012. 556 с.
3. Черногор Л. Ф. О нелинейности в природе и науке: монография. Харьков, 2008. 576 с.
4. Черногор Л. Ф. Физика Земли, атмосферы и геокосмоса в свете системной парадигмы // Радиопизика и радиоастрономия. 2003. т. 8, № 1, С. 59 – 106.
5. Chernogor L. F., Rozumenko V. T. Earth – Atmosphere – Geospace as an Open Nonlinear Dynamical System // Radio Physics and Radio Astronomy. 2008. vol. 13, no. 2, P. 120 – 137.
6. Черногор Л. Ф. Нелінійна радіофізика: підручник. Харків, 2016. 204 с.
7. Черногор Л. Ф. Физические эффекты солнечных затмений в атмосфере и геокосмосе: монография. Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2013. 480 с.
8. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Сверхширокополосные сигналы и процессы: монография. Харьков: Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2009. 576 с.
9. Яновский В. В. Фракталы. Возникновение новой парадигмы в физике // Universitates. 2003. № 3. С. 32 – 47.
10. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Fractal Analysis of Model Fractal Ultra-Wideband Signals // 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals: Proceedings of 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15 – 19 September 2014, Kharkiv, 2014, P. 112 – 115.
11. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A.A. Fractal Analysis of the Fractal Ultra-Wideband Signals // Problems of Atomic Science and Technology. Series ‘Plasma Electronics and New Methods of Acceleration’. 2015. No. 4(98), Iss. 9. P. 248 – 251.



12. Онищенко А. А., Лазоренко О. В. Надширокосмугові сигнали і фрактальний аналіз // Наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів: Матеріали підсумкової наукової конференції професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів, (Харків, 23 – 24 березня 2016 р.). Харків: ХНАУ імені В. В. Докучаєва, 2016. С. 112 – 113.

13. Chernogor L. F., Lazorenko O. V. and Onishchenko A. A. New Models of the Fractal Ultra-Wideband Signals // UWBUSIS`2016: Proceedings of 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 5 – 11 September 2016, Odessa, 2016, P. 89 – 92.

14. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф., Онищенко А. А. Дослідження гравітаційної хвилі за допомоги фрактального та мультифрактального аналізів // Практичне застосування нелінійних динамічних систем в інфокомунікаціях: Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції (I Міжнародного симпозиуму), 9-11 листопада 2017 р., Чернівці, Україна, 2017. С. 136 – 137.

15. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A.. Multi-Fractal Analysis of the Gravitational Waves // Vestnik of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series Physics. 2017. No. 26. P. 33 –39.

16. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A.. Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process // UWBUSIS`2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4 – 7 September 2018, Odessa, 2018, P. 34 – 39.

17. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A.. Multi-Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // UWBUSIS`2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4 – 7 September 2018, Odessa, 2018, P. 123 – 126.

18. Chernogor L. F., Garmach K. P., Lazorenko O. V., A. A. Onishchenko. Multi-Fractal Analysis of the Earth's Electromagnetic Field Variations Caused by the Powerful Geospace Storm Occurred on September 7 – 8, 2017// Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 118 – 121.

19. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Dispersive Distortions of the Fractal Ultra-Wideband Signals in Plasma Media // Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 135 – 138.

20. Лазоренко О. В., Гармаш К. П., Онищенко А. А., Черногор Л. Ф. Вариации геомагнитного поля Землі, супроводжавші геокосмічні бури 7 – 14 вересня 2017 г. // 18 Української конференції з космічних досліджень: тези 18 Української конференції з космічних досліджень, 17 – 20 вересня 2018 р., Київ, 2018. 34 с.

21. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // ICONAT-2019: Program and Abstract Book of International Conference on Natural Science and Technology, 18 – 20 September 2019, Kharkiv, 2019. P. 42

22. Onishchenko A., Chernogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A. Appl. Sci. and Eng. 2019. Vol. 20. P. 188 – 192.

23. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Onishchenko A.A. Time-Frequency and Fractal Analyses of the Earth's Magnetic Field Variations Appeared During Powerful Geospace Storms Took Place in September 2017 // Astronomy and Space in the Kyiv University: Book of Abstracts International Conference, (Kyiv, 25-28 May 2021). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. Astronomical Observatory, 2021. P. 90 – 91.

24. Лазоренко О. В., Онищенко А. А., Черногор Л. Ф. Метод коригуючої функції для фрактального аналізу // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 210. С. 177 – 187.

25. Onishchenko A., Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // Journal of Natural Science and Technologies. 2022. Vol. 1, No. 1. P. 56 – 61.

26. Лазоренко О. В., Онищенко А. А., Черногор Л. Ф. Мультифрактальний аналіз модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів // Радіотехніка. Все-укр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 211. С. 74 – 85.
27. Onishchenko A., Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // ICONAT-2022: Conference Book of IV. International Conference on Natural Science and Technology, 24 – 26 August 2022, Antalya, 2022. 74 p.
28. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Fractal Analysis in Space Physics // Astronomy and Space Physics : Proceedings of International Conference, 18 – 20 October 2022, Kyiv, 2022. P. 77 – 78.
29. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., Onishchenko A. A. Fractal Analysis in Problems of the Applied Physics // Electronics and Applied Physics: Book of Proceedings of the XVIII International Conference, 18 – 22 October 2022, Kyiv, 2022. P. 148 – 149.
30. Mandelbrot B. Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension. Flammarion, 1989. 196 p.
31. Mandelbrot B. B. Fractals: Form, Chance and Dimension. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977. 468 p.
32. Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. W. H. Freeman and Company, New York. 1982. 468 p.
33. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальна радіофізика. 1. Теоретичні основи // Радіофізика та радіоастрономія. 2020. Т. 25, № 1. С. 3 –77.
34. Hausdorff F. Dimension und äußeres Maß // Math. Ann. 1919. Vol. 79. – P. 157-179.
35. Bandt Ed. C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K. J., Kannan V., Kumar V. Fractals. Wavelets and their Applications. Springer, 2014. 508 p.
36. Crownover R. M. Introduction to Fractals and Chaos. Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995. 299 p.
37. Moon F. C. Chaotic Vibrations. An Introduction for Applied Scientists and Engineers. New Jersey: Wiley-Interscience, 2004. 309 p.

38. Mandelbrot B. B. *Fractals and Chaos. The Mandelbrot Sets and Beyond*. New York: Springer-Verlag, 2004. 308 p.
39. Feldman D. P. *Chaos and Fractals. An Elementary Introduction*. Oxford: Oxford University Press, 2012. 408 p.
40. Schroeder M. *Fractals, Chaos, Power Laws*. New York: W. H. Freeman and Company, 1991. 429 p.
41. Barnsley M. *Fractals Everywhere*. San Diego: Morgan Kaufman, 1993. 531 p.
42. Яновский В. В. *Лекции о нелинейных явлениях. Том 1*. Харьков: Институт монокристаллов, 2006. 456 с.
43. Losa G. A., Merlini D., Nonnenmacher T. F., Weibel E. R. *Fractals in Biology and Medicine. Volume IV*. Berlin: Birkerhauser, 2005. 314 p.
44. Kozlov G. V. Yanovskii Yu. G. *Fractal mechanics of polymers: chemistry and physics of complex polymeric materials*. Toronto: Apple Academic Press, 2015. 370 p.
45. Stanley H. E. *Fractals and Disordered Systems*. Springer, 1996. 408 p.
46. Takayasu H. *Fractals in physical sciences*. Manchester and New York: Manchester University Press, 1990. 170 p.
47. Meakin P. *Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. 674 p.
48. Pietronero L., ed. *Fractals' Physical Origin and Properties*. Springer Science, 1989. 370 p.
49. Lesmoir-Gordon N., Mandelbrot B., Stewart I., eds. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer, 2010. 207 p.
50. Al-Akaidi M. *Fractal Speech Processing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. 214 p.
51. Barnsley M. F. *Fractals in Multimedia*. Springer, 2002. 257 p.
52. Kumar D., Arjunan S. P., Aliahmad B. *Fractals: Application in Biological Signalling and Image Processing*. CRC Press, 2017. 174 p.
53. Levy-Vehel J., Lutton E. *Fractals in Engineering. New Trends in Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag, 2005. 289 p.

54. Kozlov G. V., Mikitaev A. K., Zaikov G. E. The Fractal Physics of Polymer Synthesis. Apple Academic Press, 2013. 345 p.
55. Di Ieva A. The Fractal Geometry of the Brain. New York: Springer, 2016. 585 p.
56. Brambila F., ed. Fractal Analysis. Applications in Health Sciences and Social Sciences. InTech, 2017. 216 p.
57. West B. J. Fractal Physiology and Chaos in Medicine. World Scientific, 2013. 344 p.
58. Sadana A., Sadana N. Fractal Analysis of the Binding and Dissociation Kinetics for Different Analytes on biosensor Surfaces. Elsevier, 2008. 361 p.
59. Banerji A. Fractal Symmetry of Protein Exterior. Springer, 2013. 55 p.
60. Ionescu C. M. The Human Respiratory System: An Analysis of the Interplay between Anatomy, Structure, Breathing and Fractal Dynamics. Springer, 2013. 217 p.
61. Quadfeul S. A. Fractal Analysis and Chaos in Geosciences. Novi Sad: InTech Press, 2012. 174 p.
62. Turcotte D. L. Fractals and Chaos in Geology and Geophysics. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 398 p.
63. Булат А. Ф., Дырда В. И. Фракталы в геомеханике. Киев: Наукова думка, 2005. 357 с.
64. Dauphine A. Fractal Geography. Wiley and Sons, 2012. 241 p.
65. Chandrasekhar E., Dimri V. P., Garde V. M. Wavelets and Fractals in Earth System Sciences. Boca Raton: CRC Press, 2014. 271 p.
66. Ghanbarian B. and Hunt A. G., eds. Fractals: Concepts and Applications in Geosciences. Boca Raton, London, New York: CRC Press, 2017. 351 p.
67. Scholz C. H., Mandelbrot B. B., eds. Fractals in Geophysics . Springer Basel AG, 1989. 313 p.
68. Birdi K. S. Fractals in Chemistry, Geochemistry, and Biophysics. An Introduction. Springer Science, 1993. 263 p.
69. Baveye P., Parlange J. Y., Stewart B. A., eds. Fractals in Soil Science. Stewart. CRC Press, 1998. 377 p.

70. Farmer M. E. Application of Chaos and Fractals to Computer Vision. Bentham e-Books, 2015. 410 p.
71. Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. Selecta Volume E. Springer, 1997. 541 p.
72. Mandelbrot B., Hudson R. L. The Misbehavior of Markets. A fractal View of Risk, Ruin and Reward. New York: Basic Books, 2006. 300 p.
73. Bovill C. Fractal Geometry in Architecture and Design. New-York: Springer-Science, 1996. 195 p.
74. Lung C. W., March N. H. Mechanical Properties of Metals: Atomistic and Fractal Continuum Approaches. Singapore: World Scientific, 1999. 415 p.
75. Frame M., Urry A. Fractal Worlds: Growth, Built, and Imagined. New Haven, London: Yale University Press, 2016. 515 p.
76. Baryshev Y., Teerikorpi P. Discovery of Cosmic Fractals. New Jersey: World Scientific, 2002. 373 p.
77. Frantz M., Crannell A. Viewpoints: Mathematical Perspective and Fractal Geometry in Art. Princeton: Princeton University Press, 2011. 232 p.
78. Marks-Tarlow T. Psyche's Veil. Psychotherapy, Fractals and Complexity. London: Taylor and Francis Group, 2008. 343 p.
79. Hoverstadt P. The Fractal Organization. Wiley, 2008. 367 p.
80. Kral F. Social Invisibility and Diasporas in Anglophone Literature and Culture: The Fractal Gaze. Palgrave Macmillan, 2014. 230 p.
81. Jadczyk A. Quantum Fractals: From Heisenberg's Uncertainty to Barnsley's Fractality. World Scientific, 2014. 345 p.
82. Feder J. Fractals. New York and London: Springer, 1988. 284 p.
83. Li. J. M., Lu L., Lai M. O., Ralph B. Image-Based Fractal Description of Microstructures. Springer Science, 2003. 272 p.
84. Mandelbrot B. B. Self-affine fractal sets. // Fractals in Physics. North-Holland, Amsterdam, 1986. P. 3 – 28.
85. Горобець Ю. І., Кучко А. М., Вавилова І. Б. Фрактальна геометрія у природознавстві: Навчальний посібник. Київ: Наукова думка, 2008. 232 с.

86. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Second Edition. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. 337 p.
87. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. Wiley and Sons, 2014. 400 p.
88. Falconer K. Techniques in Fractal Geometry. Chichester: John Wiley & Sons, 1997. 256 p.
89. Mandelbrot B. B. Multifractals and  $1/f$  Noise. wild self-Affinity in Physics (1963 – 1976). New York: Springer-Verlag, 1999. 431 p.
90. Seuront L. Fractals and Multifractals in Ecology and Aquatic Science. Boca Raton: CRC Press, 2010. 344 p.
91. Gil'mutdinov A. K., Ushakov P. A., and El-Kharazi R. Fractal Elements and their Applications. Cham, Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. 252 p.
92. Crilly A. J., Eamshaw R. A., Jones H. Fractals and Chaos. Springer-Verlag, 1991. 277 p.
93. Пащенко Р. Э. Основы теории формирования фрактальных сигналов. Харьков: ХООО «НЭО ЭкоПерспектива», 2005. 296 с.
94. Barnsley M. F., ed. Fractal Approximation. Constructive Approximation. Special Issue. 1989. Vol. 5, No. 1. 170 p.
95. Peitgen H.O., Jurgens H., Saupe D. Fractals for the Classroom. Part Two. Complex Systems and Mandelbrot Set. New York: Springer-Verlag, 1992. 512 p.
96. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальна радіофізика. 2. Фрактальний і мультифрактальний аналіз // Радіофізика та радіоастрономія. 2023. Т. 28, № 1. С. 5 –70.
97. Bagmanov V. Kh., Potapov A. A., Sultanov A. Kh, Wei Zang. Fractal Filters Intended for Signal Detection during Remote-Sensing Data Processing // Journal of Communications Technology and Electronics, 2018, Vol. 63, No. 10, P. 1163–1169.
98. Tarasov V. E. Fractional dynamics. Applications of fractal Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. New York: Springer, 2011. 522 p.
99. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. New York: Elsevier, 2006. 523 p.

100. Saichev A. I., Woyczynski W. A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences: Distributional and Fractal Calculus, Integral Transforms and Wavelets. Boston: Birkhauser, 1997. 336 p.
101. Jaggard D. L. On Fractal Electrodynamics. Recent Advances in Electromagnetic Theory, 1990. P. 183-224.
102. Devaney R. L., Keen L. Chaos and Fractals. The Mathematics Behind the Computer Graphics. Rhode Island: American Mathematical Society, 1989. 148 p.
103. Tricot C. Douze definitions de la densité logarithmique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1981. Vol. 293. P. 549–552.
104. Abry P., Goncalves P., Levy J. Vehel Scaling, eds. Fractals and Wavelets. – Wiley and Sons, 2009. 504 p.
105. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing. San Diego, CA: Academic Press, 1998. 851 p.
106. Family F., Vicsek T., eds. Dynamics of Fractal Surfaces. World Scientific Publishing, 1991. 480 p.
107. Kolmogorov A. N., Tikhomirov V. M.  $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ capacity of sets in function spaces //, Uspekhi Mat. Nauk. 1959. Vol. 14, Iss. 2(86). P. 3–86.
108. Minkowski H. Uber die Begriffe Lange // Oberflache und Volumen. Jahresbericht der Deutschen mathematikervereinigung. 1901. Vol. 9. P. 115 – 121.
109. Bouligand G. Ensembles impropres et nombre dimensionnel // Bull. Sci. Math. 1928. Vol. 52(2). P. 320–344, 361-376.
110. Hilborn R. C. Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford: Oxford University Press, 2000. 650 p.
111. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica. 1983. Vol. D9. P. 189-208.
112. Rényi A. On measures of information and entropy // Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1960. 1961. P. 547–561.
113. Richardson L. F. The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels // General System Yearbook. 1961. Vol. 6. P. 139-187.



114. Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension // *Science*. 1967. Vol. 156, Iss. 3775. P. 636-638.
115. Болотин Ю. Л., Тур А. В., Яновский В. В. Конструктивный хаос. Харьков, 2005. 420 с.
116. Sornette D. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools*. Springer, 2009. 528 p.
117. Alexander S., Orbach R. Density of states on fractals: « fractons » // *Journal de Physique Lettres*. 1982. Vol. 43(17). P. 625–631.
118. Harte D. *Multifractals. Theory and Applications*. Boca Raton, 2001. 248 p.
119. Cohen L. *Time-Frequency Analysis*. New Jersey, 1994. 300 p.
120. Madisetti V. K., ed. *The Digital Signal Processing Handbook. Wireless, Networking, Radar, Sensor Array Processing, and Nonlinear Signal Processing*. Boca Raton, 2014. 876 p.
121. Cattani C. *Wavelet Based Approach to Fractals and Fractal Signal Denoising. Lecture Notes in Computer Science*. 2009. P. 143–162.
122. Li M. *Fractal Time Series. A Tutorial Review*// *Mathematical Problems in Engineering*. 2010. P. 1–26.
123. Eke A., Herman P., Kocsis L., Kozak L. R. Fractal characterization of complexity in temporal physiological signals // *Physiol. Meas.* 2002. Vol.23. P. R1–R38.
124. Lomb N. R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data // *Astrophysics and Space Science*. 1976. Vol. 39. P. 447 – 462.
125. Lopes R., Betrouni N. Fractal and multifractal analysis // *Medical Image Analysis*. 2009. Vol. 13. P. 634–649.
126. Adler C , Carter P., Cawley R. A comparison of the fractal dimension of cloud radiance graphs for two infrared color bands// *The Physics of Phase Space*. Berlin. 1987. P. 45-50.
127. Chen W.S., Yuan S.Y. Some Fractal Dimension Estimate Algorithms and Their Applicatons To One-Dimensional Biomedical Signals // *Biomed Eng Appl Basis Comm*. 2002 (June). Vol. 14. P. 100-108.

128. Raghavendra B.S, Narayana Dutt D. Computing fractal dimension of signals using multiresolution box-counting method // *Int. J. Inf. Math. Sci.* 2010. Vol. 6, No. 1. P. 50–65.
129. Gneiting T., Sevcikova H. and Percival D. B. Estimators of fractal dimension: assessing the roughness of time series and spatial data // *Statist. Sci.* 2012. Vol. 27. P. 247–277.
130. Tricot C., Quiniou J. F., Wehbi D., Roques-Carmes C., Dubuc B. Evaluation de la dimension fractale d'un graphe // *Revue Phys. Appl.* 1988. Vol. 23. P. 111-124.
131. Pilgrim I., P. Taylor R. *Fractal Analysis of Time-Series Data Sets: Methods and Challenges* // *Fractal Analysis*, 2019. P. 1-26.
132. Burlaga L. F., Klein L. W. Fractal structure of the interplanetary magnetic field // *Journal of Geophysical Research.* 1986. Vol. 91, No. A1. P. 347 – 350.
133. Higuchi T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory // *Physica D.* 1988. Vol. 31. P. 277–283.
134. Esteller R., Vachtsevanos G., Echauz J. and Litt B. A comparison of waveform fractal dimension algorithms. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I // Fundamental Theory and Applications.* 2001. Vol. 48. P. 177–183.
135. Petrosian A. Kolmogorov complexity of finite sequences and recognition of different preictal EEG patterns // *IEEE: Proc. Eighth IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems.* 1995. P. 212 – 217.
136. Sevcik C. On fractal dimension of waveforms // *Chaos Solitons & Fractals.* 2006. Vol. 28. P. 579–580.
137. Kalauzi A., Spasic S., Culic M., Grbic G., Martac L. J. Consecutive Differences as a Method of Signal Fractal Analysis // *Fractals.* 2005. Vol. 13, No. 04. P. 283–292.
138. Kalauzi A., Bojić T., Rakić L. Extracting complexity waveforms from one-dimensional signals // *Nonlinear Biomedical Physics.* 2009. Vol. 3, No. 1. P. 8.
139. Phinyomark A., Phothisonothai M., Suklaead P., Phukpattaranont P., Limsakul C. Fractal Analysis of Surface Electromyography (EMG) Signal for Identify Hand

Movements Using Critical Exponent Analysis // *Communications in Computer and Information Science*. 2011. P. 703–713.

140. Bigerelle M., Iost A. Calcul de la dimension fractale d'un profil par la methode des autocorrelations moyenees normees (AMN) // *C.R. Acad. Sci. Paris*. 1996. Vol. 323, Serie II b. P. 669-674.

141. Maragos P., Potamianos A. Fractal dimensions of speech sounds: Computation and application to automatic speech recognition // *J. Acoust. Soc. Am.* 1999. Vol. 105, No. 3. P. 1925-1932.

142. Kith K., Sourina O., Kulish V., Khoa N. M. An algorithm for fractal dimension calculation based on Renyi entropy for short time signal analysis // *ICICS 2009: 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing 2009*. P.1-5

143. Prigarin S. M., Hahn K., Winkler G. Variational dimension of random sequences and its application // *Numerical Analysis and Applications*. 2009. Vol. 2, No. 4. P. 352–363.

144. Liaw S.-S., Chiu F.-Y. Fractal dimensions of time sequences// *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2009. Vol. 388, No. 15-16. P. 3100–3106.

145. Hastings H. M., Sugihara G. *Fractals: A User's Guide for the Natural Science*. Oxford: Oxford University Press, 1993. 248 p.

146. Chen X.B., Chen H., Chen Y. Spectrum Sensing for Cognitive Ultra-Wideband Based on Fractal Dimensions. // *2011 Fourth International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications*. Hangzhou: IEEE Press, 2011. P. 363–367.

147. Yin X.-A., Yang X.-H., Yang Z.-F. Using the R/S method to determine the periodicity of time series // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009. Vol. 39, No. 2. P. 731–745.

148. Mandelbrot B., and Wallis J. R. Computer experiments with fractional Gaussian noises // *Water Resources Res.* 1969. Vol. 5, No. 1. P. 228–241.

149. Muniandy S. V., Lim S. C., Murugan R. Inhomogeneous scaling behaviors in Malaysian foreign currency exchange rates // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 2001. Vol. 301, No. 1-4. P. 407–428.

150. Alessio E., Carbone A., Castelli G., Frappietro V. Second-order moving average and scaling of stochastic time series // *The European Physical Journal B - Condensed Matter*. 2002. Vol. 27, No. (2). P. 197–200.

151. Vandewalle N., Ausloos M. Crossing of two mobile averages: A method for measuring the roughness exponent // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58, No. 5. P. 6832–6834.

152. Beran J. *Statistics For Long-Memory Processes*. Chapman and Hall, 1994. 315 p

153. Taqqu M. S., Teverovsky V., Willinger W. Estimators For Long-Range Dependence: An Empirical Study // *Fractals*. 1995. Vol. 03, No. 04. P. 785–798.

154. Goncalves P., Abry P., Rilling G., Flandrin P. Fractal Dimension Estimation: Empirical Mode Decomposition Versus Wavelets // *ICASSP-88 : Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988. 1988 International Conference on 3: III-1153 - III-1156*.

155. Wu Z., Huang N. E. Ensemble Empirical Mode Decomposition: A Noise-Assisted Data Analysis Method // *Advances in Adaptive Data Analysis*. 2009. Vol. 01, No. 01. P. 1–41.

156. Scafetta N., Grigolini P. Scaling detection in time series: Diffusion entropy analysis // *Physical Review E*. 2002. Vol. 66, No. 3.

157. Jaffard S., Lashermes B., Abry P. Wavelet Leaders in Multifractal Analysis // *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. 2006. P. 201–246.

158. Ihlen E. A. F. Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab // *Frontiers in Physiology*. 2012, Vol. 3, Article 141.

159. Julian M., Alcaraz R., Rieta J. J. Generalized Hurst Exponents as a Tool to Estimate Atrial Fibrillation Organization from the Surface ECG // *Computing in Cardiology*. 2013. Vol. 40. P. 1199-1202.

160. Lee, H., Chang, W. Multifractal regime detecting method for financial time series // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2015. Vol. 70. P. 117–129.

161. Morales R., Di Matteo T., Gramatica R., Aste T. Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series // *Phys. A Stat. Mech. Appl*. 2012. Vol. 391. P. 3180–3189.

162. Flandrin P., ed. Time-Frequency. Time-Scale Analysis. San Diego: Academic Press, 1999. 386 p.
163. Jizba P., Korbel J. Multifractal diffusion entropy analysis: Optimal bin-width of probability histograms // *Physica A*. 2014. Vol. 413. P. 438–458.
164. Vicsek T. Mass multifractals // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*. 1990. Vol. 168, No. 1. P. 490–497.
165. Gu G.-F., Zhou W.-X. Detrending moving average algorithm for multifractals // *Physical Review E*. 2010. Vol. 82, No. 1.
166. Ghosh D., Dutta S., Chakraborty S. Multifractal detrended cross-correlation analysis for epileptic patient in seizure and seizure free status // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2014. Vol. 67. P. 1–10.
167. Krakovska H., Krakovska A. Fractal Dimension of Self-Affine Signals: Four Methods of Estimation// *XXXVI Dynamics Days Europe in Corfu, 6th-10<sup>th</sup> June, Greece 2016*. P. 1-8
168. Roueff F., Levy-Vehel J. A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation. // *Fractals 98: World Scientific Fractals 98 Oct 1998. Valletta, Malta., 1998*.
169. Chernogor L. F., Lazorenko O. V. Fractal Ultra-Wideband Signals // *UWBUSIS'2004: Proc. Second International Workshop "Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals"*, 19 – 22 September 2004, Sevastopol, Ukraine. Sevastopol, 2004. P. 118 – 120.
170. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Фрактальные сверхширокополосные сигналы // *Радиофизика и радиоастрономия*. 2005. Т. 10, № 1. С. 62 – 84.
171. Thim J. Continuous nowhere differentiable functions: Master thesis. Lulea: Lulea University of Technology, 2003. 94 p.
172. Tong H. Dimension Estimation and Models. New Jersey: World Scientific, 1993. 223 p.
173. Bandt C., Barnsley M., Devaney R., Falconer K. J., Kannan V., Vinod Kumar P. B., eds. *Fractals, Wavelets, and their Applications: Contributions from the International Conference and Workshop on Fractals and Wavelets (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics)*. Switzerland: Springer Int. Publ., 2014. 508 p.

174. Пащенко Р. Э., Пащенко Э. И. Анализ влияния отношения сигнал/помеха на величину фрактальной размерности // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил, 2009, випуск 3(21), С. 62-65.
175. Arneodo A., Grasseau G., and Holschneider M. Wavelet transform of multifractals // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61. P. 2281-2284.
176. Arneodo A., Bacry E., and Muzy J. F. The thermodynamics of fractals revisited with wavelets // *Physica A.* 1995. Vol. 213. P. 232–275.
177. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications.* 2002. Vol. 316, No. 1-4. P. 87–114.
178. Arneodo A., Audit B., Kestener P. and Roux S. Multifractal Formalism based on the Continuous Wavelet Transform // *Scholarpedia.* 2007, Vol. 3, P. 1-20.
179. Weiss B., Clemens Z., Bódizs R., Vágó Z., Halász P. Spatio-temporal analysis of monofractal and multifractal properties of the human sleep EEG // *Journal of Neuroscience Methods.* 2009. Vol. 185. P. 116–124.
180. Kantelhardt J. W., Rybski D., Zschiegner S. A., Braun P., Koscielny-Bunde E., Livina V. Bunde A. Multifractality of river runoff and precipitation: comparison of fluctuation analysis and wavelet methods // *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications.* 2003. Vol. 330, No. 1-2. P. 240–245.
181. Telesca L., Lapenna V., Macchiato M. Mono- and multi-fractal investigation of scaling properties in temporal patterns of seismic sequences // *Chaos, Solitons and Fractals.* 2004. Vol. 19. P. 1–15.
182. Shimizu Y., Thurner S., Ehrenberger K. Multifractal Spectra as a Measure of Complexity in Human Posture // *Fractals.* 2002. Vol. 10, No. 01. P. 103–116.
183. Jaffard S. Multifractal Formalism for Functions. Part I: Results Valid for All Functions // *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28, No. 4. P. 944-970.
184. B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational waves from a Binary Black Hole Merger // *Phys. Rev. Lett.*, PRL 116, 061102 2016. P.1-16
185. Einstein A. *Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss.* 1, 1916 .688 p.

186. Einstein A., Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. 1, 1918. 154 p.

187. Schwarzschild K., Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. 1, 1916. 189 p.

188. Chernogor L. F., Lazorenko O. V.. Gravitational Waves as the Unique Ultra-Wideband Process// UWBUSIS'2016: Proc. 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 5 – 11 September, 2016, Odessa, Ukraine. Odessa, 2016. P. 47– 52.

189. Edwards W. N., Estimates of meteoroid kinetic energies from observations of infrasonic airwaves // Atmos. Solar-Terr. Phys., 2006. vol. 68, P. 1136–1160

190. Ens T. A., Brown P. G., Edwards W. N., Silber E. A., Infrasonic production by bolides: A global statistical study // Atmos. Solar-Terr. Phys., 2012. vol. 80. P. 208–229

191. Le Pichon A., Ceranna L., Pilger C. et al, Russian fireball largest ever detected by CTBTO infrasonic sensors // Geophysical Research Letters, 2016. vol. 40, no 14. P. 3732–3737,

192. Chernogor L. F., Rozumenko V. T. The physical effects associated with Chelyabinsk meteorite's passage // Problems of Atomic Science and Technology, 2013. vol. 86, no 4. P. 136 – 139,

193. Lazorenko O. V., Chernogor L. F., System Spectral Analysis of Infrasonic Signal Generated by Chelyabinsk Meteoroid // Radioelectronics and Communications Systems, 2017. vol. 60, no 8. P. 331–338,

194. [http://www.bgr.bund.de/EN/Themen/Seismologie/Kernwaffenteststopp\\_en/%C3%9Cberwachungsnetz\\_en/Deutsche-IMS-Stationen/deutsche-ims-stationen\\_inhalt.html](http://www.bgr.bund.de/EN/Themen/Seismologie/Kernwaffenteststopp_en/%C3%9Cberwachungsnetz_en/Deutsche-IMS-Stationen/deutsche-ims-stationen_inhalt.html).

195. Русанова К. А. Лазоренко О. В. Аналітичне вейвлет-перетворення варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної магнітної бурі 7 – 8 вересня 2017 р. // Актуальні проблеми фізики та їх інформаційне забезпечення: матеріали XIX Регіон. студ. наук. конф. (17 – 18 квітня 2019 р.). Харків: НТУ «ХПІ», 2019, с. 18 – 22.

196. Русанова К. А. Вейвлет-аналіз часових варіацій магнітного поля Землі, що виникають під час геокосмічних бур // Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія», освітня програма «фізика». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. 59 с.

197. Смирнова Д. С. Вігнер-аналіз часових варіацій магнітного поля Землі // Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Бакалавр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. 47 с.

198. Павленко А. О. Атомарні функції в аналізі магнітометричних даних // Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія», освітня програма «фізика». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2020. 40 с.

199. Мірзоев Р. Г. Фрактальний аналіз часових варіацій магнітного поля Землі // Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія», освітня програма «фізика». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2018. 55 с.

200. Осетинський О. І. Дослідження часових варіацій магнітного поля Землі, що виникають під час геокосмічних бур // Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія», освітня програма «фізика». Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2019. 56 с.

201. Nishida A. Geomagnetic Diagnosis of the Magnetosphere. New York-Heidelberg-Berlin Springer-Verlag. 1978. 300 p.

202. Черногор Л. Ф. Каналы воздействия вариаций космических и атмосферных факторов на биосферу и человека // Фізіологічний журнал, 2010, т. 56, № 3, с. 25 – 40.

203. Сайт космічної погоди. [Електронний ресурс] : <http://spaceweather-live.com>.

204. Campbell W. H. Earth Magnetism. A Guided Tour through Magnetic Fields. San Diego: A Harcourt Science and Technology Company , Academic Press, 2001, 179 p.



205. Гармаш К. П. Леус С. Г., Пазюра С. А. та ін. Статистические характеристики флуктуаций электромагнитного поля Земли // Радиофизика и радиоастрономия. 2003. №8. С. 163–180.

206. Luo Y., Черногор Л. Ф., Гармаш К. П. Геомагнітний ефект турецького землетрусу 24 січня 2020 р. // Радіофізика і радіоастрономія. 2020. Т. 25, № 4. С. 276-289.

207. Ito M. Dispersion of very short microwave pulses in waveguide // IEEE Trans. 1965. MTT-13, No. 3. P. 357 – 364.

## ДОДАТОК А

**Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:**

1. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of the Fractal Ultra-Wideband Signals // Problems of Atomic Science and Technology. Series ‘Plasma Electronics and New Methods of Acceleration’. 2015. No. 4(98), Iss. 9. P. 248 – 251. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів).*

2. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Gravitational Waves // Vestnik of V. N. Karazin Kharkiv National University, Series Physics. 2017. No. 26. P. 33 – 39.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

3. Chernogor L. F., Garmach K. P., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Earth’s Electromagnetic Field Variations Caused by the Powerful Geospace Storm Occurred on September 7 – 8, 2017// Problems of Atomic Science and Technology. Series ‘Plasma Electronics and New Methods of Acceleration’. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 118 – 121. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).*

4. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // Eskişehir Technical Univ. J. of Sci. and Tech. A. Appl. Sci. and Eng. 2019. Vol. 20. P. 188 – 192. (Іноземний фаховий науковий журнал).

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського*

метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь розробці методу динамічного фрактального аналізу).

5. Лазоренко О. В., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Метод коригуючої функції для фрактального аналізу // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 210. С. 177 – 187.

*(Особистий внесок здобувача: участь у розробці методу коригуючої функції для фрактального та мультифрактального аналізів, створення набору модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів, комп'ютерна реалізація методу коригуючої функції, результати аналізу модельних сигналів).*

6. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // Journal of Natural Science and Technologies. 2022. Vol. 1, No. 1. P. 56 – 61. (Іноземний фаховий науковий журнал).

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., а також участь в аналізі фізичного сенсу цих результатів).*

7. Лазоренко О. В., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Мультифрактальний аналіз модельних фрактальних і мультифрактальних сигналів // Радіотехніка. Всеукр. міжвід. наук.-техн. зб. 2022. № 211. С. 74 – 85.

*(Особистий внесок здобувача: участь у розробці та комп'ютерна реалізація нових числових характеристик для мультифрактального аналізу).*

#### **Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:**

8. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of Model Fractal Ultra-Wideband Signals // 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals: Proceedings of 7th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 15 – 19 September 2014, Kharkiv, 2014, P. 112 – 115.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокопосмугових сигналів).*

9. **Онищенко А. А.**, Лазоренко О. В. Надширокосмугові сигнали і фрактальний аналіз // Наукова конференція професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів: Матеріали підсумкової наукової конференції професорсько-викладацького складу, аспірантів і здобувачів, (Харків, 23 – 24 березня 2016 р.). Харків: ХНАУ імені В. В. Докучаєва, 2016. С. 112 – 113.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального аналізу модельних фрактальних надширокосмугових сигналів).*

10. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** New Models of the Fractal Ultra-Wideband Signals // UWBUSIS'2016: Proceedings of 8th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 5 – 11 September 2016, Odessa, 2016, P. 89 – 92. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: нові моделі фрактальних надширокосмугових сигналів і результати їх фрактального аналізу).*

11. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф., **Онищенко А. А.** Дослідження гравітаційної хвилі за допомоги фрактального та мультифрактального аналізів // Практичне застосування нелінійних динамічних систем в інфокомунікаціях: Матеріали VI Міжнародної науково-практичної конференції (I Міжнародного симпозіуму) 9-11 листопада 2017 р., Чернівці, Україна, 2017. С. 136 – 137.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

12. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis of the Gravitational Waves as a Unique Ultra-Wideband Process // UWBUSIS'2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4–7 September 2018, Odessa, 2018, P. 34 – 39. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів гравітаційної хвилі, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація).*

13. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Multi-Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid //

UWBUSIS'2018: Proceedings of 9th International Conference on Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, 4 – 7 September 2018, Odessa, 2018, P. 123 – 126. (Scopus, Web of Science)

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу).*

14. Лазоренко О. В., Гармаш К. П., **Онищенко А. А.**, Черногор Л. Ф. Вариации геомагнитного поля Земли, сопровождавшие геокосмические бури 7 – 14 сентября 2017 г. // 18 Української конференції з космічних досліджень: тези 18 Української конференції з космічних досліджень 17 – 20 вересня 2018 р., Київ, 2018. С. 34

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної геокосмічної бурі 7 – 8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).*

15. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Dynamical Fractal Analysis of the Acoustic Ultra-Wideband Signal Caused by the Chelyabinsk Meteoroid // ICONAT-2019: Program and Abstract Book of International Conference on Natural Science and Technology, 18 – 20 September 2019, Kharkiv, 2019. P. 42.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів акустичних сигналів, згенерованих під час падіння Челябінського метеороїда, а також участь в аналізі їх фізичного сенсу; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

16. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Time-Frequency and Fractal Analyses of the Earth's Magnetic Field Variations Appeared During Powerful Geospace Storms Took Place in September 2017 // Astronomy and Space in the Kyiv University: Book of Abstracts International Conference, (Kyiv, 25-28 May 2021). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. Astronomical Observatory, 2021. P. 90 – 91.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час надпотужної*

геокоsmічної бурі 7–8 вересня 2017 р., а також участь в аналізі фізичного змісту цих результатів).

17. **Onishchenko A.**, Chernogor L., Lazorenko O. Fractal and Multi-Fractal Analyses of the Geomagnetic Field Variations Caused by the Earthquake on January 24, 2020 in Turkey // ICONAT-2022: Conference Book of IV. Int. Conf. on Natural Science and Technology, 24–26 August 2022, Antalya, 2022. 74 p.

*(Особистий внесок здобувача: результати фрактального та мультифрактального аналізів часових варіацій геомагнітного поля, що виникли під час потужного землетрусу 24 січня 2020 р., а також участь в аналізі фізичного сенсу цих результатів).*

18. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis in Space Physics // Astronomy and Space Physics: Proceedings of International Conference 18–20 October 2022, Kyiv, 2022. P. 77–78.

*(Особистий внесок здобувача: участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

19. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Fractal Analysis in Problems of the Applied Physics // Electronics and Applied Physics: Book of Proceedings of the XVIII International Conference, 18–22 October 2022, Kyiv, 2022. P. 148–149.

*(Особистий внесок здобувача: участь у створенні метода узагальненого фрактального аналізу та його комп'ютерна реалізація; участь у розробці методу динамічного фрактального аналізу).*

**Наукові праці, які додатково відображують наукові результати дисертації:**

20. Chernogor L. F., Lazorenko O. V., **Onishchenko A. A.** Dispersive Distortions of the Fractal Ultra-Wideband Signals in Plasma Media // Problems of Atomic Science and Technology. Series 'Plasma Electronics and New Methods of Acceleration'. 2018. No. 4(116), Iss. 10. P. 135–138. (Scopus)

*(Особистий внесок здобувача: результати моделювання дисперсійних спотворень високочастотних фрактальних надширокопосмугових сигналів, що виникають під час їх поширення у геокоsmосі).*